مقدمة في
التحليل الحديث للسلاسل الزمنية

الدكتور
سمير مصطفي شعراوي

أستاذ الإحصاء
كلية العلوم - جامعة الملك عبد العزيز
المملكة العربية السعودية

مركز النشر العلمي
جامعة الملك عبد العزيز
ص ب : ٨٠٢٠٠ - جدة : ٢١٥٨٩
المملكة العربية السعودية

الطبعة الأولى : ١٤٢٦هـ (٢٠٠٥م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

شعراوي ، سمير مصطفى
مقدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية. / سمير مصطفى شعراوي .- جدة ، ١٤٢٦هـ
..ص ؛ ..سم

ردمك: ٧-٤٢٤-٠٦-٩٩٦٠

١- الاحصاء التطبيقي ٢- السلال الزمنية أ. العنوان
ديوي ٥١٩,٢٣٢ ١٤٢٦/٢٣٨٤

رقم الإيداع: ١٤٢٦/٢٣٨٤
ردمك: ٧-٤٢٤-٠٦-٩٩٦٠

مطابع جامعة الملك عبد العزيز

بسم الله الرحمن الرحيم

الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي أنزلَ عَلَى عَبْدِهِ الْكِتَابَ وَلَمْ يَجْعَل لَّهُ عِوَجَا * قَيِّمًا لِّيُنذِرَ بَأسًا شَدِيدًا مِن لَّدُنْهُ وَيُبَشِّرَ الْمُؤْمِنِينَ الَّذِينَ يَعْمَلُونَ الصَّالِحَاتِ أنَّ لَهُمْ أجْرًا حَسَنًا

[الكهف: 1-2]

صدق الله العظيم

إهـــداء

- إلى أرواح أمي وأبي وأخي وابنة أختي الطاهرة
- إلـى هبـة الله إلـي ... إلـى من شـاركتني رحلـة الجهـد، والكفـاح ... إلـى زوجتـي ... تقـديرًا لـصبرها واعترافًـا بحقها.
- إلى أساتذتي وزملائي وطلابي.

أهدي هذا الجهد المتواضع داعيًا الله سبحانه وتعـالي أن يتقبله خالصًا لوجهه الكريم وأن يجعل منـه علمًـا ينتفع به.



تمهيد

من المؤكد أن تحليل السلاسل الزمنية على المستوى العالمي قـد شـهد فـي النصف الثاني من القرن العشرين تطورًا بالغ الأهمية خاصـة فـي العقـود الثلاثـة الأخيرة، ومن المؤكد أيضًا أن هذا التطور يعزى إلى المنهجية الحديثة التـي قـدمها العالمان بوكس وجينكنز في مطلع السبعينات من نفس القرن والتي أصبحت منذ ذلـك الوقت الأداة الأكثر قبولاً وشيوعًا في الأوساط العلمية والنظرية والتطبيقية خاصة في العالم المتقدم حيث أثبتت هذه المنهجية كفاءة عالية في نمذجة البيانات الزمنية والتنبـؤ بها. ومنهجية بوكس وجينكنز نقلة نوعية غير مسبوقة في نمذجة البيانـات الزمنيـة والتنبؤ بها والمدخل الحقيقي للتحليل الحديث للسلاسل الزمنية، وقد أصبحت في فتـرة وجيزة المرجعية الرئيسية للخبراء والباحثين والدارسين داخل وخارج أروقة الجامعات والمعاهد ومراكز الأبحاث والاستشارات العلمية التي يتم على أساسها تقـويم معظـم الدراسات الحديثة. وقد اكتملت الركائز الرئيسية لهذه المنهجية من نظريات إحـصائية وطرق عددية ووسائل بيانية وحسابية بنهاية السبعينات من القرن العشرين.

وعلي الرغم من الانتشار الهائل لهذه المنهجية والتي تكتسب فـي كـل يـوم أنصارًا جدد من جميع أنحاء العالم فإن هذه المنهجية لم تعرف طريقًا ممهدًا إلى الكتب والمراجع والأبحاث في البلاد العربية، ومازال تطبيق هذه المنهجية في هـذه الـبلاد يدخل في باب الرفاهية الفكرية حيث تعاني هذه المنهجية في بلادنا من غربة الانتشار والذي يكاد يقتصر على عدد قليل من الباحثين داخل أروقة الجامعات والمعاهد ومراكز

البحث العلمي. كما تعاني هذه المنهجية في البلاد العربية من قصور واضح في كيفية استخدام هذه المنهجية خاصة إذا كان المستخدم يفتقر إلى الخبرة والمهارة والممارسة العملية الضرورية لتطبيق مثل هذه المنهجية، فالأعمال الراهنة بالصورة التي نراها في تطبيق مثل هذه المنهجية في بلادنا تلقي بظلال قاتمة على مستقبل هذه النوعية من التحليل. وكانت نتيجة ذلك أن خلت المكتبة العربية أو كادت من الكتب والمراجع العربية المتخصصة في السلاسل الزمنية والتي تستهدف الطالب المتخصص في الإحصاء في مرحلة البكالوريس.

ولقد نبتت لدي فكرة هذا الكتاب الذي يستهدف الدارس للإحصاء دراسة أكاديمية منذ فترة طويلة لعدة أسباب، أولها إثراء المكتبة العربية بكتاب متخصص في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية والتي تكاد تخلو من مثل هذه النوعية من الكتب، وثانيها أن منهجية بوكس وجينكنز هي الأكثر قبولاً وشيوعًا في الأوساط العلمية والنظرية والتطبيقية، وثالثها أن الأبحاث العديدة في هذه المنهجية والتي ساهمت في تحكيمها على مدار سبعة عشر عامًا كانت تعاني من قصور واضح في كيفية تطبيق هذه المنهجية، ورابعها أن الكتب الأجنبية المتاحة في هذا المجال إما أن تكون نظرية بحتة تفوق قدرات الطالب في مرحلة البكالوريس أو تطبيقية لا تحقق الأهداف الأكاديمية للطالب المتخصص في الإحصاء. لكل هذه الأسباب كان هذا الكتاب والذي أردته منذ البداية أن يجمع بين النظرية والتطبيق.

ويهدف هذا الكتاب بصفة عامة إلى تقديم منهجية بوكس وجينكنز في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية، ويركز الكتاب على الجوانب النظرية الضرورية لفهم هذه المنهجية، كما يركز على الأدوات والنظريات الإحصائية الضرورية لتنمية قدرة الطالب أو القارئ بصفة عامة على استخدام المنطق الرياضي والإحصائي في هذا المجال والذي يتناسب مع قدرة الطالب في مرحلة البكالوريس. وإيمانًا منا بأن التطبيق لا ينفصل عن النظرية فإن هذا الكتاب لا يغفل الجوانب التطبيقية والتي تهدف إلى تمكين الطالب في النهاية من التغلب على مشاكل التعرف على النموذج الملائم وتقدير

معلمات هذا النموذج وتشخيصه والتنبؤ بالمشاهدات المستقبلية بحيث تتكون لدى الطالب أو القارئ مستقبلاً قدرة تحليلية وبحثية في مجال السلاسل الزمنية.

ويضم هذا الكتاب خمسة أبواب على النحو التالي:

- الباب الأول ويتناول بالدراسة مفهوم السلاسل الزمنية وطبيعتها وأنواعها وأهداف دراستها. كما يتناول هذا الباب مفهوم أخطاء التنبؤ وطرق قياس حجمها والمعايير المختلفة التي يتم على أساسها اختيار أسلوب التنبؤ المناسب.فضلاً عن ذلك فإن هذا الباب يقدم أهم طرق وأساليب التنبؤ التقليدية ومزايا وعيوب كل منها. وأخيرًا يقدم هذا الباب مركبات السلسلة الزمنية وطرق تقديرها وطريقة التجزيء الضربي ومزاياها وعيوبها.

- ويقدم الباب الثاني التعاريف والمفاهيم الأساسية الضرورية لاستيعاب موضوع التحليل الحديث للسلاسل الزمنية باستخدام منهجية بوكس وجينكنز مثل السكون بنوعيه التام والضعيف ودالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي وطرق تقديرهما وأهم التحويلات الرياضية لتسكين السلاسل غير الساكنة.

- ويتناول الباب الثالث بالدراسة مفهوم العمليات العشوائية الخطية وصيغتي الانعكاس والاضطرابات الهادئة والعلاقة بينهما. كما يقدم هذا الباب نماذج الانحدار الذاتي ونماذج المتوسطات المتحركة ونماذج ARMA المختلطة واشتقاق الخصائص الرئيسية الهامة لها. كما يقدم هذا الباب مفهوم نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية وأسلوبا عاماً لإيجاد شروط السكون للسلاسل الزمنية.

- الباب الرابع وهو بمثابة القلب للكتاب فيتناول تفصيليًا المراحل الأربع المختلفة لمنهجية بوكس وجينكنز حيث يتناول المبحث الأول منه مرحلة التعرف على النموذج المبدئي الملائم وكيفية توظيف دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لاختيار مثل هذا النموذج. كما يتناول المبحث الثاني أهم طرق تقدير معلمات النماذج المختلفة مثل طريقة المربعات الصغرى الشرطية وغير الشرطية وطريقة الإمكان الأكبر الشرطية وغير الشرطية. أما المبحث الثالث من هذا الباب فيتناول

الفحوص والاختبارات التشخيصية الضرورية لدراسة ملاءمة النمـوذج المبـدئي للسلسلة المرصودة وذلك بغرض تحسين وتطوير هذا النموذج. أما المبحث الرابع فيتناول بالدراسة أسلوب التنبؤ المقترح وخصائصه وتقدير أخطاء التنبؤ وكيفيـة التنبؤ بالمشاهدات المستقبلية وبناء فترات الثقة لها.

- الباب الخامس ويقدم دراسة تفصيلية لكيفية تطبيق منهجية بوكس وجينكنز فـي تحليل حالة عملية وذلك من أجل تحقيق الأهداف التطبيقية، وقد اختيرت سلسلة عدد الحجاج السنوي لتحقيق هذا الغرض.

ويتضمن كل باب من الأبواب الجزيئات الآتية على الترتيب

1. المحتويات والأهداف العامة والتفصيلية للباب.
2. عرض المادة العلمية للباب.
3. مجموعة من التمارين وهي تشكل جزء تكاملي هام لتحقيق أهداف الباب.

وفي النهاية أود أن أشكر الأستاذ الدكتور أحمد الحريري رئيس قسم الإحصاء بكلية العلوم، جامعة الملك عبد العزيز على تشجيعه المتواصل من أجل الانتهاء مـن هـذا الكتاب، وأود أن أشكر كل من الدكتور هارون بركـات والـدكتور مختـار قنـصوه الأستاذين بنفس القسم على تشجيعهما الدائم وأرائهما البناءة بخصوص ترجمة بعـض المصطلحات العلمية. كما أود أن أشكر الدكتور ماجد عثمان الأستاذ بقسم الإحصاء – كلية الاقتصاد –جامعة القاهرة لأنه أول من حثني على كتابة مثل هذا العمـل. كمـا أشكر الدكتور أحمد لطفي الأستاذ المساعد بنفس القسم على تشجيعه المتواصـل مـن أجل الانتهاء من هذا العمل وعلى مراجعته لجزء من المادة العلمية. كما أود أن أوجه شكر خاص للدكتور عماد سليمان المدرس بنفس القسم على مراجعته الدقيقة للمـادة العلمية وعلى الملاحظات الفنية التي أبداها والتي كان لها أثر إيجابي على هذا العمـل وساعدت على إخراج هذا الكتاب في صورته الحالية. فضلاً عن ذلك أود أن أشكر كل من الدكتور شريف صالح المدرس بنفس القسم والأستاذ طلعت عطية المـدير الفنـي بمعهد العالمية بالمملكة العربية السعودية على الاستشارات الفنيـة الخاصـة بتنفيـذ الأشكال البيانية والجداول وإعداد البرامج ذات الصلة على الحاسب الآلي، كما أود أن

أشيد بالجهد الذي بذله السيد محمد العبد في طباعة هذا الكتاب، والله أسأل أن يكــون لهذا العمل أثاره الإيجابية على المستويين الأكاديمي والتطبيقي راجيًا منه عز وجل أن يتقبله خالصًا لوجهه الكريم.

المؤلف



المحتويات

الباب الأول

مقدمة

INTRODUCTION

□ ماهية السلاسل الزمنية □ أنواع السلاسل الزمنية □ أهداف دراسة السلاسل الزمنية □ قياس أخطاء التنبؤ □ اختيار أسلوب التنبؤ المناسب □ طرق التنبؤ □ مركبات السلاسل الزمنية □ قياس الاتجاه العام □ طريقة التجزئ الضربي

يهدف هذا الباب إلى تعريف القارئ بمفهوم وطبيعة السلاسل الزمنية والاختلافات بينها وبين غيرها من البيانات وأنواعها والأهداف العامة من دراستها. كما يهدف هذا الباب أيضًا إلى تقديم مفهوم أخطاء التنبؤ وطرق قياس حجم هذه الأخطاء والمعايير المختلفة التي يتم على أساسها اختيار أسلوب التنبؤ المناسب. كما تهدف المادة العلمية المختارة لهذا الباب إلى تقديم أهم الطرق والأساليب التقليدية التي تستخدم في التنبؤ بمشاهدات السلاسل الزمنية مثل الطرق المحددة (غير العشوائية) والطرق الحسية ad hoc والتعرف على أهم ومميزات وعيوب كل منها. كما يتناول الباب بالدراسة مركبات السلاسل الزمنية الأربع: الاتجاه العام والتغيرات الموسمية والدورية وغير المنتظمة وطرق قياس الاتجاه العام والتغيرات الموسمية. ويقدم الباب في النهاية طريقة التجزيء الضربي كواحدة من أهم الطرق التقليدية في التنبؤ بالسلاسل الزمنية الموسمية ومميزات وعيوب هذه الطريقة.

وبنهاية هذا الباب سيكون الطالب قادرًا على

- تعريف السلسلة الزمنية
- التمييز بين السلاسل الزمنية المتقطعة والمتصلة
- معرفة أهداف دراسة وتحليل السلاسل الزمنية
- تعريف أخطاء التنبؤ وقياس حجمها
- معرفة معايير اختيار أسلوب التنبؤ المناسب
- التمييز بين النماذج المحددة والحسية والعشوائية
- التنبؤ باستخدام كثيرات الحدود والنمو الأسي
- معرفة مميزات وعيوب النماذج المحددة

- التنبؤ باستخدام النموذج السطحي
- التنبؤ باستخدام نموذج التغير الثابت
- التنبؤ باستخدام نموذج المتوسطات المتحركة البسيطة
- التنبؤ باستخدام نموذج التمهيد الأسي
- معرفة مميزات وعيوب كل نموذج من النماذج الحسية
- تعريف كل مركبة من مركبات السلسلة الزمنية
- استخدام الانحدار في تقدير الاتجاه العام ومعرفة مميزاته وعيوبه
- استخدام أسلوب المتوسطات المتحركة في تقدير الاتجاه العام ومعرفة مميزاته وعيوبه
- تقدير المعاملات الموسمية وتفسيرها
- تعريف وحساب السلسلة المعدلة أي بعد إزالة أثر الموسم
- استخدام نموذج التجزيء الضربي في التنبؤ بالسلاسل الموسمية
- معرفة مزايا وعيوب طريقة التجزيء الضربي

1.1 ماهية السلاسل الزمنية

في أدبيات الإحصاء يمكن التعرف على ثلاثة أنواع مختلفة من البيانات، هي البيانات التجريبية وبيانات الحصر (المسح) والبيانات الزمنية. وتعتمد الفلسفة الخاصة بالبيانات التجريبية على الأسلوب التجريبي والذي يبدأ بتحديد العوامل الهامة والتي يعتقد الباحث أن لها تأثير معنوى على الظاهرة أو المتغير موضع الدراسة، ثم يتم الحصول على البيانات من خلال تصميم تجربة – تعتمد على مبدأ العشوائية– تسمح بقياس تأثير أحد أو بعض هذه العوامل على الظاهرة أو المتغير موضع الدراسة في ظل ثبات العوامل الأخرى. وتعتمد الفلسفة الخاصة ببيانات الحصر أو المسح على مبدأ الحصول على البيانات عن طريق حصر أو مسح الوضع القائم للظواهر موضع الدراسة كما هو دون محاولة التحكم في العوامل المختلفة التي قد تؤدي إلى الحالة التي توجد عليها هذه الظواهر. أما البيانات الزمنية فيتم الحصول عليها من خلال رصد البيانات أو القيم التي تعبر عن الظاهرة أو المتغير موضع الدراسة على فترات زمنية متتالية بهدف تحقيق عدة أهداف أهمها اكتشاف نمط التطور التاريخي للظاهرة أو

المتغير موضع الدراسة وكيفية الاستفادة من هذا النمط في التنبؤ بهذه الظاهرة في المستقبل. ويطلق على البيانات الزمنية "السلاسل الزمنية" وهي الموضوع الرئيسي لهذا الكتاب.

تعريف

السلسلة الزمنية هي مجموعة من المشاهدات أو القياسات التي تأخذ على إحدى الظواهر (الاقتصادية – الاجتماعية– الطبية– الطبيعية– .....) على فترات زمنية متتابعة عادة ما تكون متساوية الطول.

ويمكن رصد السلاسل الزمنية في شتي أنواع المعرفة وميادين التطبيق المختلفة. ففي الاقتصاد يمكن رصد بيانات الدخل السنوي وقيمة التحويلات الخارجية السنوية والإيداعات ربع السنوية في أحد البنوك وعدد العاطلين الشهري وغيرها من البيانات. وفي علم الاجتماع يمكن رصد عدد الجرائم الأسبوعي وعدد حالات الطلاق أو الزواج السنوي وغيرها. وفي مجال التعليم يمكن رصد السلاسل الزمنية الخاصة بتطور أعداد الطلبة السنوي في مراحل التعلىم المختلفة وأعداد المدارس والمدرسين السنوية في الكليات المختلفة. وفي مجال الطب يمكن رصد السلاسل الزمنية الخاصة بتطور الأمراض المختلفة ومدى التزايد أو التناقص في الإصابة بهذه الأمراض مثل التطور التاريخي لنسبة المصابين بالذبحة الصدرية أو الأورام الخبيثة، كما يمكن رصد السلاسل الزمنية الخاصة برسم القلب أو الدماغ. وفي مجال الأرصاد الجوية يمكن رصد السلاسل الزمنية الخاصة بكمية الأمطار الشهرية والسلاسل الزمنية الخاصة بسرعة الرياح ونسبة الرطوبة ودرجات الحرارة وغيرها. وفي مجال البيئة يمكن رصد السلاسل الزمنية الخاصة بتطور نسب التلوث في الأجواء المحيطة وتطور متوسط الحموضة في مياه الأمطار السنوية ونسب الأكسوجين المذاب في المياه كمقياس لتلوث المياه. وفي مجال الزراعة يمكن رصد السلاسل الخاصة بتطور الإنتاج

السنوي من المحاصيل الزراعية والدخل السنوي الناتج من قطاع الزراعة. وفي مجال الكيمياء يمكن رصد درجة الحرارة التي تأخذ كل دقيقة من عملية كيميائية معينة، وفي مجال الهندسة يمكن رصد تطور نسب الوحدات المعيبة الشهرية وتطور إنتاجية العامل السنوية في أحد المصانع.

وتختلف السلسلة الزمنية عن البيانات التجريبية وبيانات الحصر في ثلاث نقاط أساسية هي:

1. تأخذ بيانات السلسلة الزمنية على فترة زمنية طويلة نسبيًا يعتقد أنها تؤثر على الظاهرة أو المتغير موضع الدراسة، بينما تأخذ البيانات التجريبية أو بيانات الحصر (المسح) عند نقطة زمنية معينة أو على الأكثر في فترة زمنية قصيرة يعتقد أنها لا تؤثر بشكل معنوي على الظاهرة أو المتغير موضع الدراسة وعادة ما تسمي هذه البيانات بالبيانات المتقاطعة cross sectional data .

2. يتم دراسة السلسلة الزمنية عادة بمعزل عن العوامل الأخرى – بخلاف الزمن – التي قد تؤثر عليها وعن الظواهر الأخرى التي قد ترتبط معها في علاقة إحصائية.
3. عادة ما تكون بيانات أو مشاهدات السلسلة الزمنية مرتبطة ببعضها البعض، ويأخذ الارتباط بين هذه المشاهدات أشكالاً وأنماطًا عديدة تختلف باختلاف طبيعية الظاهرة، ومن ثم فإن ترتيب المشاهدات في السلاسل الزمنية ذو أهمية خاصة ولذلك فإن معظم الأساليب التي تستخدم في تحليل البيانات التجريبية أو بيانات الحصر لا تكون صالحة لتحليل السلاسل الزمنية وبالتالي كان لابد من ابتكار وتطوير أدوات وأساليب خاصة لتحليل السلاسل الزمنية.

وقد خصص الإحصاء مجالاً منفردًا لتحليل البيانات الزمنية يعرف بمجال السلاسل الزمنية والذي تطور تطورًا هائلاً في العقود الثلاثة الأخيرة من القرن العشرين بسبب المنهجية الحديثة التي قدمها العالمان بوكس G.E.Box وجينكنز G.M. Jenkins في سنة 1976 والتي يمكن اعتبارها بحق البداية الحقيقية لتحليل الحديث للسلاسل الزمنية والسبب الحقيقي وراء القفزات العلمية الهائلة التي حدثت في هذا المجال. وللمزيد من التفاصيل حول أنواع البيانات الإحصائية والفروق الأساسية بينهم يمكن للقارئ الرجوع إلى شعراوي وإسماعيل (2002).

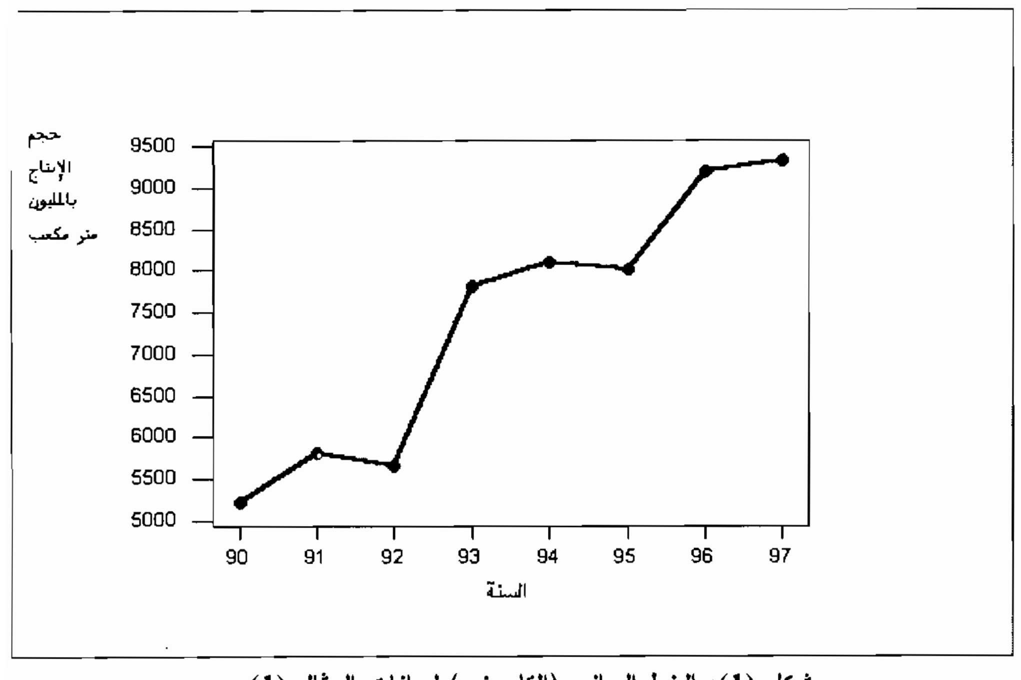
وتعرض السلسلة الزمنية عادة في صورة جدول أو خط أو منحنى بياني يعرف بالخط التاريخي أو المنحني الزمني time series plot كما في الأمثلة الآتية:

مثال (1):

يوضح الجدول الآتي حجم الإنتاج السنوي للبترول بالمليون متر مكعب في إحدى الدول من سنة 1990 إلى سنة 1997

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
حجم الإنتاج	5210	5820	5655	7800	8100	8010	9200	9335

ويمكن عرض هذه البيانات في شكل خط بياني (تاريخي) في شكل **(1)**



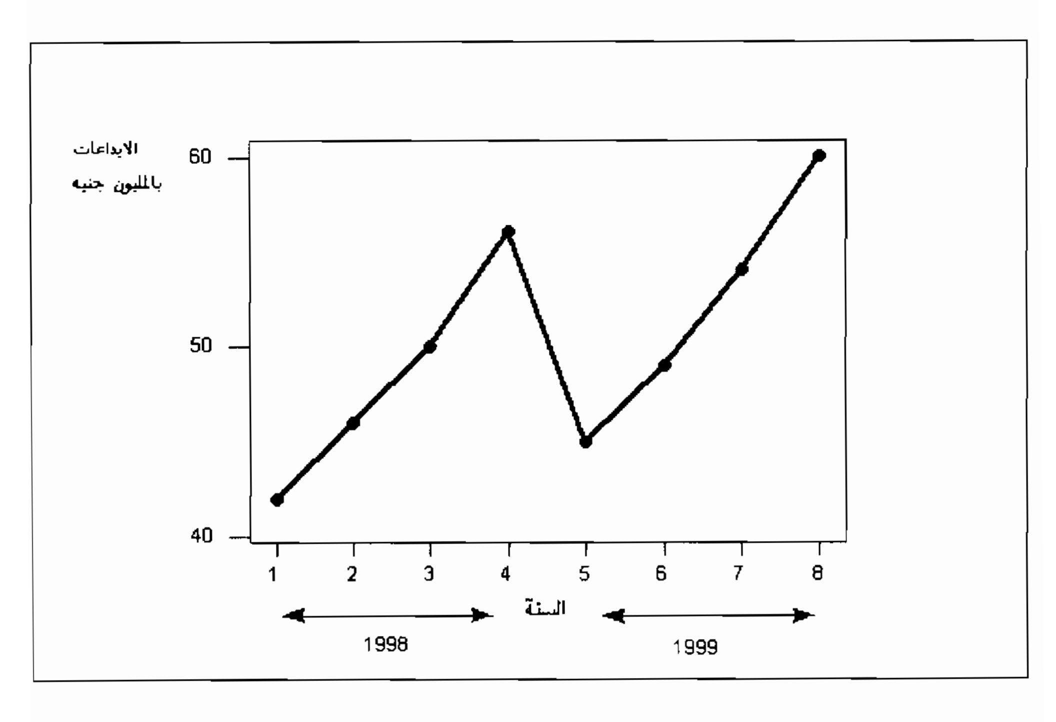
شكل (1): الخط البياني (التاريخي) لبيانات المثال (1)

مثال (2):

يوضح الجدول الآتي تطور قيمة الإيداعات ربع السنوية بالمليون دولار في أحد البنوك في سنتي 1998 و 1999

الإيداعات	الموسم (الفصل)	السنة
42	1	1998
46	2	
50	3	
56	4	
45	1	1999
49	2	
54	3	
60	4	

ويمكن عرض هذه البيانات في شكل (2).



شكل (2): العرض البياني لبيانات المثال(2)

1.2 أنواع السلاسل الزمنية

عند دراسة السلاسل الزمنية لبعض الظواهر قد يكون من الممكن أخذ قياسات أو قراءات عند كل لحظة زمنية، ويقال لهذه السلاسل بأنها سلاسل متصلة continuous، ومن أمثلة هذه السلاسل درجات الحرارة ورسم القلب ورسم الدماغ. أما معظم السلاسل الزمنية التي تنشأ في الواقع فتتكون من قراءات أو مشاهدات مأخوذة عند فترات زمنية محددة مسبقاً. وقد تكون هذه الفترات دقائق أو ساعات أو أيام أو أسابيع أو شهور أو سنوات. وتعرف هذه السلاسل بالسلاسل المتقطعة discrete time seriesبغض النظر عن طبيعة الظاهرة أو المتغير موضع الدراسة، ومن أمثلة هذه السلاسل الدخل القومي السنوي وسعر الإقفال اليومي لأحد الأسهم في بورصة الأوراق المالية وعدد الحوادث الأسبوعية التي تحدث على أحد الطرق وعدد

خريجي إحدى الكليات السنوي وكمية الأمطار الشهرية. والسلاسل الزمنية المتقطعة هي السلاسل التي سنتعامل معها فقط في هذا الكتاب، أي أننا سنفترض دائمًا أن السلسلة متاحة فقط عند نقاط زمنية متقطعة تبعد عن بعضها فجوات زمنية متساوية الطول.

وفي الواقع يمكن الحصول على السلسلة الزمنية المتقطعة بمعاينة سلسلة زمنية متصلة وذلك بأن يتم رصد أو تسجيل القراءات فقط عند نقاط زمنية محددة متساوية الأبعاد، كما يمكن الحصول على السلسلة الزمنية المتقطعة بتراكم متغير معين خلال فترة زمنية مثل كمية الأمطار التي عادة ما تتراكم خلال يوم أو شهر مثلاً أو الناتج السنوي من أحد المحاصيل الزراعية. والاهتمام الأساسي لهذا الكتاب هو كيفية بناء النماذج للسلاسل الزمنية المتقطعة واستخدام هذه النماذج في التنبؤ بالمشاهدات المستقبلية.

1.3 أهداف دراسة السلاسل الزمنية

تدرس السلاسل الزمنية عادة لتحقيق عدد من الأهداف. وقد يكون أول أهداف هذه الدراسة هو استخدام السلسلة الزمنية لوصف وتصوير المعلومات المتاحة عن فترة زمنية توضح تطور الظاهرة المدروسة أي وصف الملامح والسمات الرئيسية للسلسلة. ويساعد وصف السلسلة إلى حد كبير في تحديد النموذج الذي يمكن أن يكون مناسبًا لتحقيق الأهداف الأخرى والتعرف على حركات الصعود والهبوط في السلسلة الزمنية والتعرف على المكونات الرئيسية مثل الاتجاه العام والتغيرات الموسمية كما سنرى في نهاية هذا الباب. أما الهدف الثاني من دراسة السلاسل الزمنية فهو التفسير ويقصد به توضيح وشرح التغيرات التي تحدث في الظاهرة باستخدام السلاسل الزمنية الأخرى التي ترتبط بها أو باستخدام عوامل البيئة المحيطة بالظاهرة ومثال ذلك تفسير التغيرات التي تحدث في سلسلة المبيعات الخاصة بإحدي السلع باستخدام السلسلة الخاصة بتغيرات أسعار هذه السلعة أو بمعرفة القرارات الاقتصادية التي اتخذت

وكانت لها علاقة مباشرة على التطور التاريخي للظاهرة أو تفسير التغيرات التي تحدث في سلسلة عدد الحوادث التي تحدث على طريق جده/ مكة المكرمة بالسلسلة الزمنية لعدد الحجاج السنوي أو السلسلة الزمنية لعدد المعتمرين الشهري أو الإجراءات الأمنية التي اتخذت للحد من هذه الحوادث. وربط التغيرات التي تحدث في السلسلة موضع الدراسة بالتغيرات التي تحدث في السلاسل والعوامل المحيطة من شأنه فهم آلية عمل السلسلة وتفسير الأنماط والتغيرات المنتظمة وغير المنتظمة التي تتعرض لها الظاهرة موضع الدراسة ومدي تأثير كل منها عليها. والهدف الثالث من دراسة السلاسل الزمنية هو الرقابة والتحكم، فقد تستخدم الخرائط الزمنية في مراقبة جودة الإنتاج وذلك من أجل التحكم في مستوي كفاءة العملية الإنتاجية وذلك باتخاذ القرارات المناسبة من وقف العملية الإنتاجية وتعديل مسارها أو استمرارها.

أما أهم أهداف دراسة السلاسل الزمنية على الإطلاق فهو التنبؤ بالمشاهدات المستقبلية والذي عادة ما يمثل الهدف النهائي من تحليل السلاسل الزمنية. وهذا الهدف هو أوضح الأهداف وأكثرها شعبية بالنسبة لدارس الإحصاء أو مستخدمه والذي من أجله كتبت عشرات الكتب العالمية والآلاف من الأبحاث المتخصصة. فتحليل السلاسل الزمنية يبدأ عادة بالتعرف على النمط المناسب لشرح آلية تطور هذه السلسلة واستكمال هذا النمط مستقبلاً. والفرض الأساسي في أساليب التنبؤ المستخدمة هو أن هذا النمط الذي تم التعرف عليه سيستمر في المستقبل القريب، وتجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن لأي أسلوب تنبؤ أن يعطي نتائج جيدة إذا لم يستمر هذا النمط، ولذلك فإنه ينصح دائماً بالتنبؤ بالقيم المستقبلية القريبة وتحديثها بمجرد الحصول على أي مشاهدة جديدة.

1.4 قياس أخطاء التنبؤ

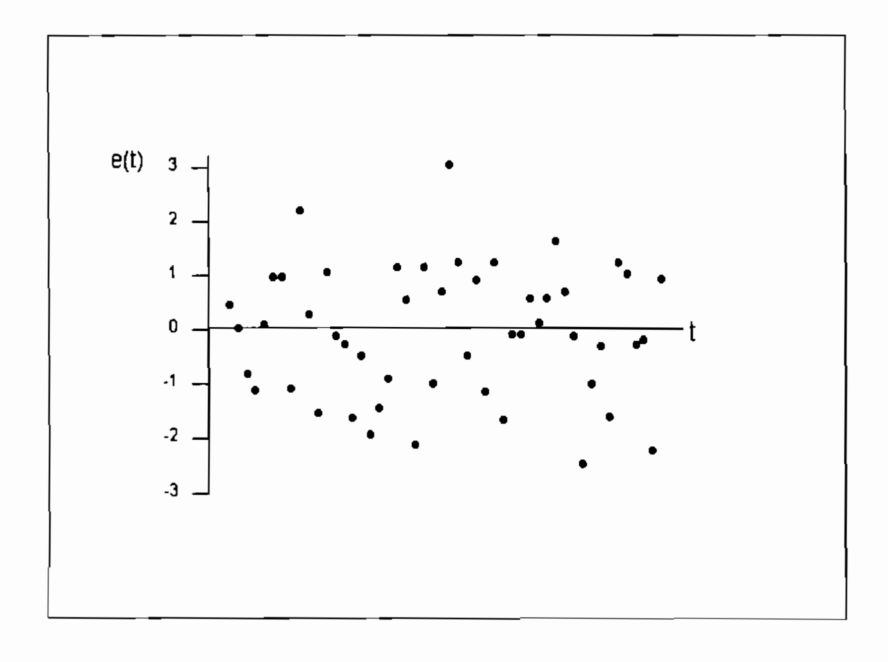
عادة ما تدرس السلسلة الزمنية بغرض اكتشاف نمط التطور التاريخي للظاهرة واستغلال هذا النمط في التنبؤ بالقيم المستقبلية. وأي تنبؤ مستقبلي لأي ظاهرة لابد أن يحتوي على قدر معين من عدم التأكد، ويمكن ترجمة هذه الحقيقة بإدراج مركبة خطأ

error component في نموذج التنبؤ. ومركبة الخطأ هي المركبة غير النمطية التي تعبر عن العوامل التي لا يمكن شرحها باستخدام التغيرات النمطية أو المنتظمـــة فـــي السلسلة. وكلما كانت هذه المركبة صغيرة زادت قدرتنا على التنبؤ والعكس صـــحيح. إذا افترضنا أن قيمة الظاهرة موضع الدراسة عند الزمن t هي y_t وأن التنبؤ بالظاهرة عند الزمن t هو $\hat{y}_t$، فإن الخطأ في التنبؤ عند الزمن t يعرف كالآتي

$$e_t = y_t - \hat{y}_t \qquad ; \qquad t = 1,2,\ldots,n$$

حيث يرمز n إلى طول السلسلة أي عدد المشاهدات.

وفحص أخطاء التنبؤ المتتالية e_t يوضح مدى ملاءمة أسلوب التنبؤ المستخدم ، فكما هو معروف من دراسة الانحدار أن أسلوب التنبؤ الملاءم لابد أن ينـــتج أخطـــاءً تتصف بطابع العشوائية أي أخطاء خالية من أي تغيرات منتظمة – كما في شكل (3) – بالإضافة إلى بعض الشروط الأخرى. وإذا كانت هذه الأخطاء محتملة بحيث يمكن اعتبار أسلوب التنبؤ ملاءم فإنه يجب قياس حجم هذه الأخطاء لتقدير دقة التنبؤ.



شكل (3): أخطاء عشوائية

ولقد عرف الفكر الإحصائي طرقًا عديدة لقياس حجم الأخطاء أهمها ما يلي:

1-مجموع الأخطاء sum of errors ويرمز له عادة بالرمز SE ويعرف على الصورة الآتية

$$SE = \sum_{t=1}^{n} e_t = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)$$

وهذا المقياس لا يفيد كثيرًا حيث أنه من المعروف أنه إذا كانت الأخطاء عشوائية فإن هذا المجموع عادة ما يكون قريبًا جدًا من الصفر بغض النظر عن حجم هذه الأخطاء.

2- متوسط الانحرافات المطلقة mean absolute deviation والذي يرمز له عادة بالرمز MAD ويعرف على الصورة الآتية:

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} |e_t| = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} |y_t - \hat{y}_t|$$

وبالرغم من معقولية هذا المقياس إلا أنه لا يستخدم كثيرًا في مجالات السلاسل الزمنية نظرًا لصعوبة خصائصه الإحصائية.

3- متوسط مربعات الأخطاء mean squared error ويرمز له عادة بالرمز MSE ويعرف على الصورة الآتية:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2$$

ويلاحظ أن طريقة المربعات الصغرى least squares method المعروفة في مجالات الانحدار والسلاسل الزمنية تعتمد على تصغير مجموع مربعات الأخطاء SSE أو تصغير متوسط مربعات الأخطاء MSE وذلك لأن المقام n والذي يمثل عدد الوحدات الزمنية المتاحة (عدد المشاهدات) هو مقدار ثابت. وبصفة عامة يمكن القول بأن خصائص هذا المقياس الإحصائية أسهل كثيراً من خصائص متوسط الأخطاء المطلقة MAD.

4- متوسط الأخطاء النسبية المطلقة mean absolute percentage error والـــذي يرمز له عادة بالرمز MAPE ويعرف على الصورة التالية:

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right| = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{e_t}{y_t}\right|$$

ويتميز هذا المقياس عن كل المقاييس بأنه مقياس نسبي أي لا يعتمد علـــى الوحـــدات المستخدمة ولكن خصائصه الإحصائية أصعب من خصائص متوسط مربعات الأخطاء MSE ولذلك فإن هذا المقياس عادة ما يستخدم في الدراسات الوصفية التي لا تستدعي القيام باستدلالات إحصائية.

1.5 اختيار أسلوب التنبؤ المناسب

من أهم عناصر تحليل السلاسل الزمنية اختيار أسلوب التنبؤ المناسب. واختيار أسلوب التنبؤ المناسب ليس بالعمل الهين وإنما هو عمل صعب وشاق ويحتـــاج مـــن الإحصائي ومتخذ القرارات التحلي بالصبر وعدم اليأس بالإضافة إلى مقومات العمـــل الأساسية من علم وخبرة ومهارة. ويعتمد الإحصائي أو متخذ القرارات بصفة عامة في اختياره لأسلوب التنبؤ المناسب على بعض المعايير أو العوامل العامة أهمها مايلي:

1- تصغير حجم أخطاء التنبؤ أول هذه المعايير التي يجب أن يضعها الإحصائي أو متخذ القرارات نصب عينيه عند اختياره أسلوب التنبؤ ومن ثم نمـــوذج التنبـــؤ المناسب، وعادة ما يقاس حجم هذه الأخطاء بأحد المقاييس الثلاثة التـــي ســـبق ذكرها (MAD- MSE- MAPE).

2- نوعية التنبؤ المطلوب، فإذا كان تنبؤ النقطة point forecast هو المطلوب من الدراسة، فإن استخدام أحد الأساليب أو النماذج التقليدية البسيطة قد يكون كافيًـــا لتحقيق هذا الهدف. وفي الكثير من الدراسات قد يكون تنبؤ الفتـــرة interval

forecast هام وكذلك اختبارات الفروض، وفي مثل هذه الحـالات لابـد مـن استخدام أسلوب تنبؤ حديث أكثر دقة وتنظيمًا مثل أسلوب بوكس وجينكنز.

3- عدد المشاهدات المتاحة، فإذا كان عدد المشاهدات صغيراً فإن اسـتخدام أحـد الأساليب الحديثة ليس له ما يبرره ويفضل استخدام أحد الأساليب التقليدية.

4- تكاليف أسلوب التنبؤ ومدي توافر البرامج الإحصائية ذات الصلة.

5- سهولة العمليات الإحصائية والحسابية الضرورية وفهم أسلوب التنبؤ المستخدم.

6- مدي تحقق الفروض النظرية التي يعتمد عليها أسلوب أو نموذج التنبؤ المناسب وهو أهم المعايير التي يجب أن تؤخذ في الاعتبـار عنـد اختيـار مثـل هـذا الأسلوب.

مما سبق يتضح للقارئ بأن أفضل أسلوب للتنبؤ ليس بالضرورة هو الأسلوب الذي يحقق أعلى دقة أو أصغر حجم أخطاء ممكن، فقد يستخدم أحد الأساليب بـسبب نوعية التنبؤ المطلوب، وقد يستخدم أسلوب أخر بسبب صغر عدد المشاهدات المتاحة، وقد يستخدم أسلوب ثالث بسبب انخفاض تكاليفه، وقد يستخدم أسـلوب رابـع بـسبب سهولة عملياته الإحصائية والحسابية، وقد يستخدم أسلوب خامس لأن الفروض النظرية التي يعتمد عليها تتوافق مع بيانات السلسلة المتاحة. وعادة ما يعتمد أسـلوب التنبـؤ المستخدم على قدرة الإحصائي أو متخذ القرارات في تحقيـق التـوازن لكـل هـذه المعايير. وبصفة عامة يمكن القول بأن طريقة التنبؤ التي يجب استخدامها هي أسـهل وأبسط طريقة يمكن تنفيذها في الزمن المتاح والتي تفي باحتياجات وظـروف التنبـؤ بأقل تكاليف ممكنة، وللمزيد من التفاصيل حول قياس الأخطاء ومعايير التنبؤ يمكـن للقارئ الرجوع إلى Bowerman and O'Connell (1987) أو إلى Gaynor and Kirkpatrick (1994)

1.6 طرق التنبؤ

يمكن تجميع طرق التنبؤ الكمية المعروفة في أدبيات السلاسل الزمنية في أســلوبين أساسيين هما.

أ- أسلوب الانحدار regression approach, ويعتمد هذا الأسلوب على تحديد المتغيرات الأخرى التي قد ترتبط بعلاقة سببية بالظاهرة أو المتغير موضع الدراسة الذي يراد التنبؤ به- والذي عادة ما يعرف بالمتغير التابع dependent variable - ثم تحديد النموذج الإحصائي أو العلاقة الدالية الملاءمة التي توضح الكيفية التي يرتبط بها هذا المتغير بالمتغيرات الأخرى والتي تأخذ في العرف الإحصائي أسماءً عديدة مثل المتغيرات المستقلة independent variables أو المتغيرات المفسرة regressors أو المتغيرات المنبئة predictors. وباستخدام هذا النموذج يمكن التنبؤ بالمتغير التابع موضع الدراسة في المستقبل إذا أمكن تحديد أو معرفة القيم المستقبلية للمتغيرات المفسرة. وتعرف النماذج التي تندرج تحت مظلة هذا الأسلوب أحيانًا بالنماذج السببية causal models . ويستخدم هذا الأسلوب في كافة أنواع المعرفة ومجالات التطبيق الخاصة الاقتصادية والاجتماعية والبيئية منها حيث يسمح هذا الأسلوب بتقييم أثر المتغيرات المتضمنة والتي عادة ما تعكس أثر الأنظمة والسياسات والقرارات المختلفة ، فعلى سبيل المثال قد نستطيع تفسير السلسلة الخاصة بقيمة المبيعات اليومية لإحدى السلع جزئيًا بواسطة سلسلة أسعار هذه السلعة والسلاسل الخاصة بالدخل الفردي وأسعار السلع البديلة. وهذا الأسلوب بالرغم من شعبيته يعاني من بعض العيوب أهما ما يلي:

1- صعوبة تحديد المتغيرات المفسرة التي ترتبط بالمتغير التابع أو الظاهرة موضع الدراسة.

2- تطبيق هذا الأسلوب يتطلب توافر بيانات تاريخية تفصيلية عن جميع المتغيرات المفسرة والقدرة على معرفة قيم هذه المتغيرات - أو على الأقل التنبؤ بها - عند الأزمنة التي يراد التنبؤ بالظاهرة عندها.

3- يفترض عدم الارتباط بين مشاهدات المتغير أو الظاهرة موضع التنبؤ، وهو فرض غير واقعي ولا يتفق مع مفهوم السلسلة الزمنية باعتبارها مجموعة من المشاهدات المرتبطة، وعادة ما يؤدي هذا الفرض غير الواقعي إلى تنبؤات غير موثوق بها.

وعادة ما يتوافر لدي الباحث مشاهدات تاريخية عن المتغير موضع الدراسة فقط ويريد التنبؤ بالمشاهدات المستقبلية لهذا المتغير بالاعتماد فقط على هذه المشاهدات. في مثل هذه الحالات يستخدم الأسلوب الثاني للتنبؤ التالي.

ب- تحليل السلاسل الزمنية time series analysis والذي يضم تحت مظلته ما يعرف بنماذج السلاسل الزمنية. ويعتمد هذا الأسلوب على تحليل البيانات التاريخية التي أخذت عن الظاهرة أو المتغير موضع الدراسة وذلك بغرض تحديد نمط البيانات. بعد ذلك - وبافتراض أن هذا النمط سيستمر في المستقبل - يستكمل هذا النمط لإعطاء التنبؤات المطلوبة. فعلى سبيل المثال إذا كان الهدف من الدراسة التنبؤ بعدد الحجاج السنوي فقد يستطيع الباحث تفسير سلوك هذا المتغير جزئيًا بواسطة عدد السكان في الدول الإسلامية ومتوسط دخل الفرد في هذه البلاد ومتوسط التكاليف المطلوبة لأداء هذه الفريضة، ولكن جزء كبير من تطور عدد الحجاج قد يعود إلى بعض العوامل الأخرى التي لا يمكن أخذها في الاعتبار بسهولة مثل الوازع الديني وحالة الطقس وغيرها من العوامل التي يكون من الصعب أو المستحيل إدراجها في النماذج السببية بسهولة. وفي هذه الحالة قد يفضل دراسة التطور التاريخي لعدد الحجاج السنوي بمعزل عن جميع العوامل

المفسرة الأخرى واكتشاف الكيفية التي يتطور بها عدد الحجاج واستخدام أحد نماذج السلاسل الزمنية لاستكمال هذه السلسلة في المستقبل.

وأسلوب السلاسل الزمنية والذي يضم ما يعرف بنماذج أو طرق السلاسل الزمنية هو محور الاهتمام الرئيسي لهذا الكتاب، ولن نتعرض للنماذج السببية بأي حال من الأحوال. والسؤال الآن هو كيف يمكن التنبؤ بالظاهرة أو المتغير موضع الدراسة باستخدام أسلوب السلاسل الزمنية دون اللجوء إلى أي متغيرات أخرى مفسرة؟ للإجابة عن هذا السؤال يمكن القول بأن أدبيات السلاسل الزمنية قد عرفت العديد من الطرق ونماذج السلاسل الزمنية والتي يمكن تقسيمها إلى ثلاثة أنواع رئيسية هي :

- النماذج المحددة (غير العشوائية)deterministic models
- والطرق الحسية ad hoc methods
- ونماذج السلاسل الزمنية العشوائية stochastic time series models

ونقدم فيما يلي عرضًا سريعًا لهذه الطرق والنماذج.

1.6.1 النماذج المحددة Deterministic Models

نعرف من دراستنا في علم الإحصاء أن نموذج المتوسط mean model يمكن التعبير عنه في الصورة العامة

$$y_t = E(y_t) + \varepsilon_t \qquad (1.6.1)$$

حيث ε_t متغيرات عشوائية غير مرتبطة توقعها الصفر وتباينها ثابت. ويقال أن هذا النموذج محدد deterministic أو غير عشوائي nonstochastic إذا أمكن التعبير عن $E(y_t)$ كدالة رياضية مباشرة في الزمن t ولتكن $f(t,\beta)$ حيث يرمز المتجه β

إلى معالم هذه الدالة الرياضية. وفي هذه الحالة يمكن التعبير عن مـــشاهدات السلـــسلة الزمنية y_t على الصورة

$$y_t = f(t,\beta) + \varepsilon_t \quad ; \quad t = 1,2,\ldots,n \qquad (1.6.2)$$

ويعني هذا أن المشاهدات المستقبلية للسلسلة يمكن التعبير عنها على الصورة

$$y_h = f(h,\beta) \quad ; \quad h = t+1 \ , \ t+2,\ldots$$

أي أن هذه النماذج تفترض أن المشاهدات المستقبلية للسلسلة تأخذ شكل رياضي محدد أي غير عشوائي $f(h,\beta)$

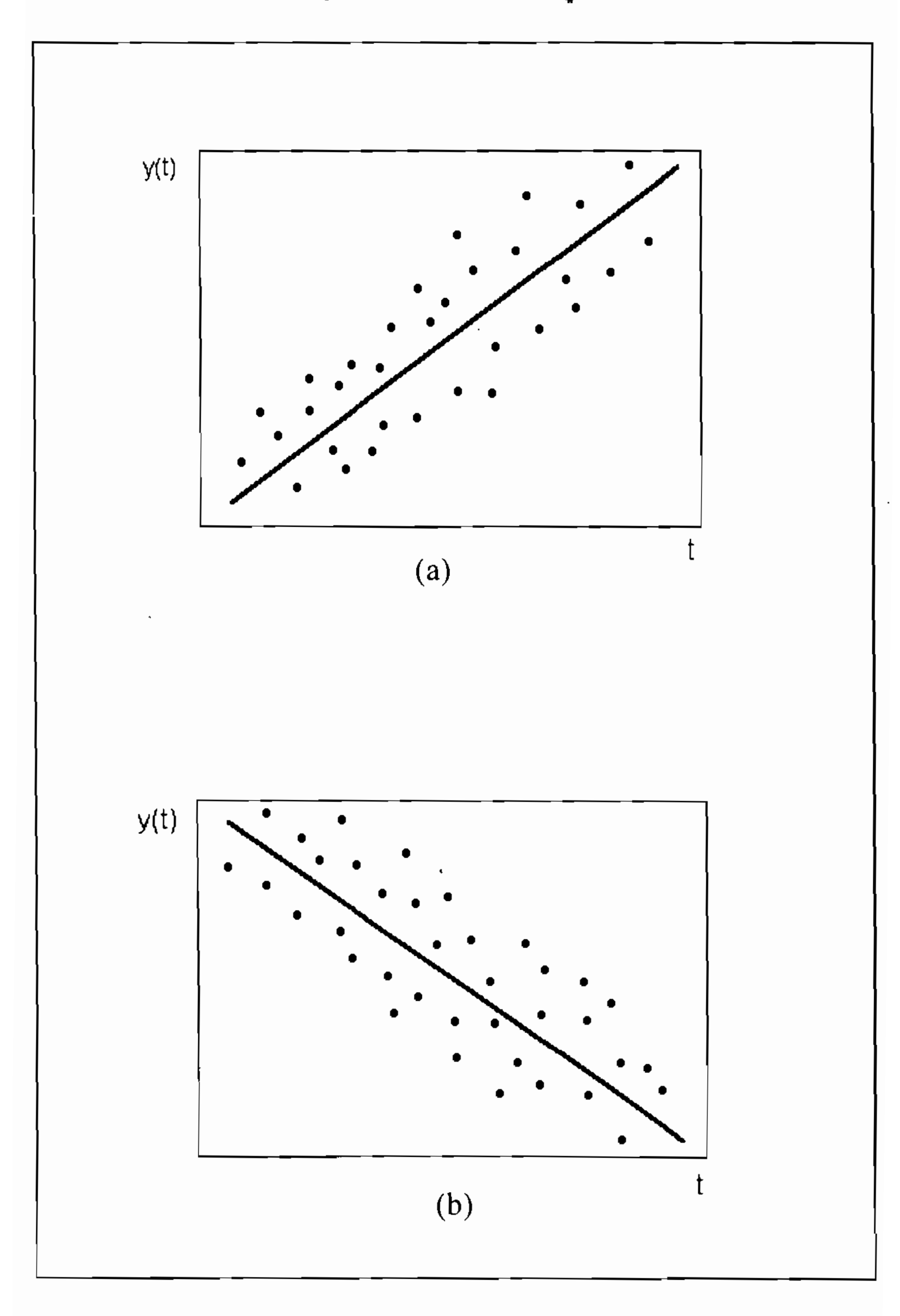
وتعتمد النماذج المحددة (1.6.2) على فرضيين أساسيين. الفـــرض الأول أن الدالة $f(t,\beta)$ دالة رياضية محددة ليس لها طابع العشوائية، والفرض الثـــاني أن ε_t متغيرات عشوائية غير مرتبطة توقعها الصفر وتباينها ثابت، وتؤدي هذه الفروض إلى أن المتغيرات $y_1, y_2, \ldots, y_n$ تكون متغيرات عشوائية غير مرتبطة، ومن أمثلة الـــدوال الرياضية التي تستخدم في هذه النماذج كثيرات الحدود والدوال الأسية والدوال المثلثية، وفيما يلي عرضًا مبسطًا لكثيرات الحدود والدوال الأسية.

كثيرات الحدود Polynomials

ويفترض هنا أن الدالة $f(t)$ أي متوسط الظاهرة تأخذ إحدى صور كثيـــرات الحدود في الزمن t. وتعتبر الصورة الخطية أهم هذه الصور وتعرف علـــى الـــشكل الآتي:

$$E(y_t) = f(t) = \beta_0 + \beta_1 t$$

وتكون هذه الدالة ملائمة إذا أمكن تمثيل متوسط الظاهرة بواسطة خط مستقيم وذلـــك بعد توقيع مشاهدات السلسلة على ورقة الرسم البياني كما في شكل (4) .



شكل (4): كثيرة الحدود الخطية

وتفترض كثيرة الحدود الخطية أن متوسط الظاهرة يتزايد بمعدل ثابت β_1 كما في الشكل (4.a) أو يتناقص بمعدل ثابت β_1 كما في الشكل (4.b)

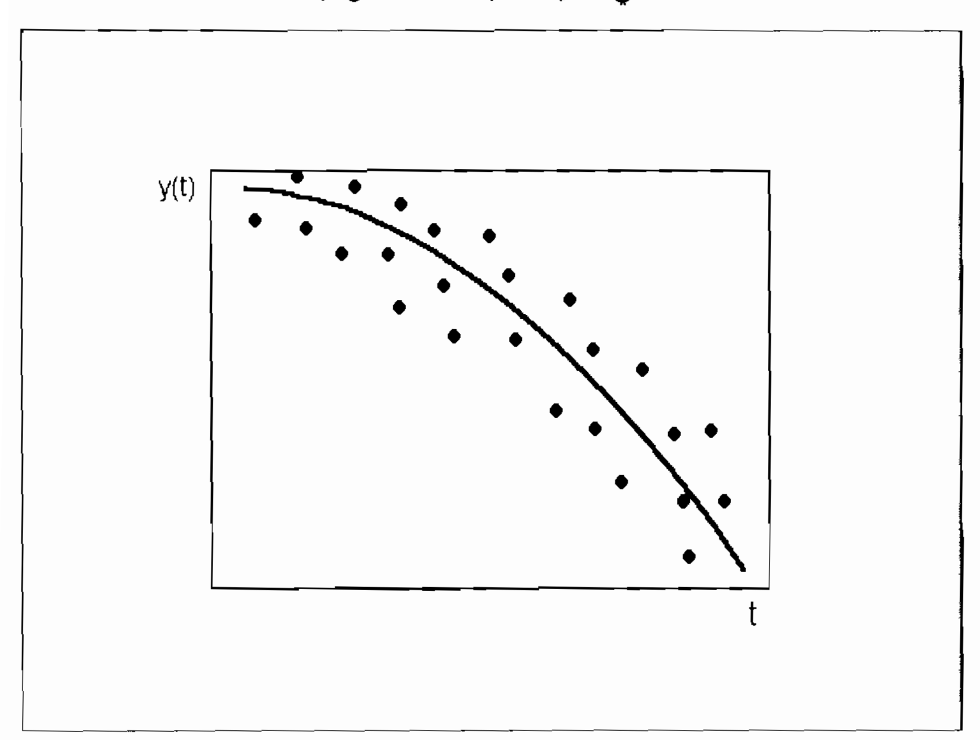
ويمكن إيجاد تقديري المربعات الصغرى $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ لمعلمتي النموذج β_0, β_1 بإجراء انحدار السلسلة y_t على الزمن t ، ومن ثم يمكن التنبؤ بالمشاهدات المستقبلية باستخدام النموذج المقدر الآتي:

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$$

وفي بعض الأحيان قد يكون الشكل الخطي غير ملاءم لتمثيل متوسط الظاهرة أو الدالة (f(t ومن الأفضل تمثيل هذا المتوسط بكثيرة حدود من الدرجة الثانية كما في الشكل-(5)- والتي تأخذ الصورة الآتية

$$E(y_t) = f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$$

وتستخدم طريقة المربعات الصغرى العادية لإيجاد التقديرات $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ وذلك بإجراء الانحدار الخطي المتعدد لقيم السلسلة y_t على المتغيرين t, t^2. وسنوضح هذا بالتفصيل عند قياس الاتجاه العام باستخدام تحليل الانحدار.



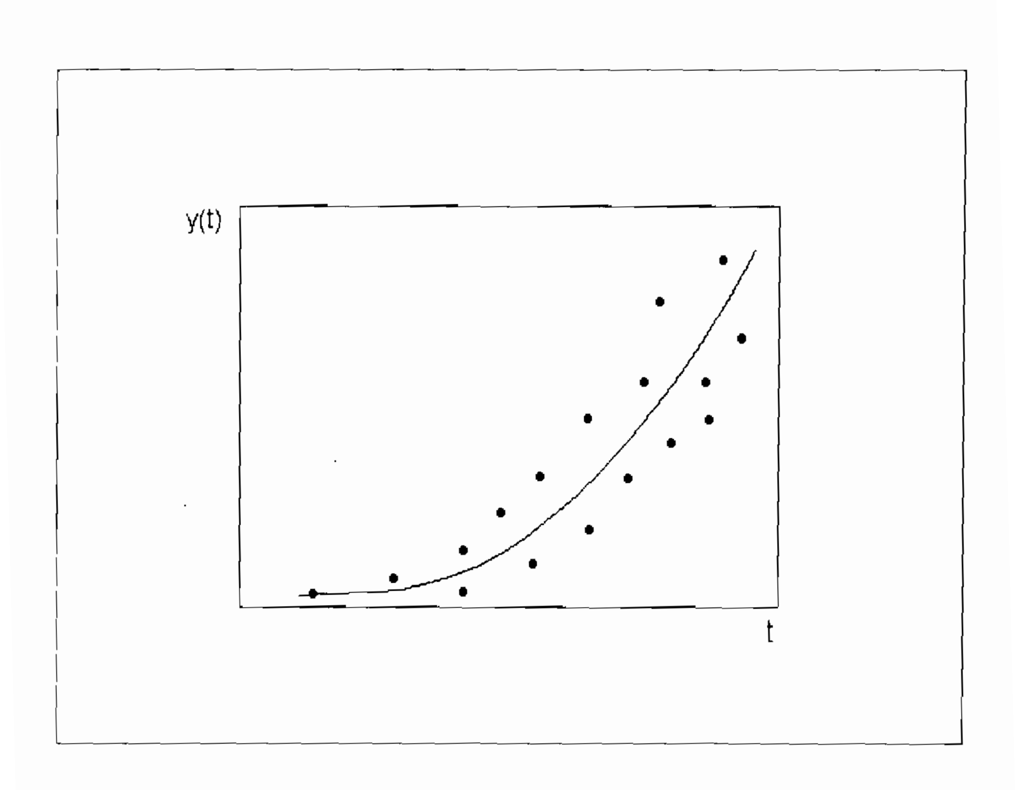
شكل (5): كثيرة حدود من الدرجة الثانية

النمو الأسي Exponential Growth

في بعض الأحيان قد يفضل تمثيل متوسط الظاهرة موضع الدراسة في شــكل دالة أسية – كما في الشكل (6)–على الصورة

$$E(y_t) = f(t) = ce^{rt} \tag{1.6.3}$$

حيث c و r مقداران ثابتان يمثلان معلمتي النموذج.



شكل (6): النمو الأسي

ويفترض النموذج الأسي أن متوسط الظاهرة ينمو بنسبة ثابتة وذلك لأن من (1.6.3)

$$\frac{E(y_t)}{E(y_{t-1})} = \frac{ce^{rt}}{ce^{r(t-1)}}$$

$$= e^r$$

حيث e^r ثابت لا يعتمد على الزمن، ويعني هذا أن

$$E(y_t) = e^r E(y_{t-1})$$

ويمكن تحويل الصورة (1.6.3) إلى الصورة الخطية بأخذ اللوغاريتمات الطبيعية للطرفين كما يلي:

$$\ln f(t) = \ln c + rt$$

أي أن

$$f^*(t) = c^* + rt$$

حيث

$$f^*(t) = \ln f(t) \; ; \; c^* = \ln c$$

وبالتالي يمكن إجراء انحدار لوغاريتم البيانات الأصلية على الزمن t وإيجاد تقديري المربعات الصغرى للمعلمتين c^*, r ومن ثم يمكن إيجاد تقدير الثابت c من العلاقة:

$$c = e^{c^*}$$

ومن ثم يمكن التنبؤ بالمشاهدات المستقبلية باستخدام النموذج المقدر الآتي:

$$\hat{y}_t = \hat{c}\; e^{\hat{r}t}$$

وتعاني الطرق أو النماذج المحددة في تحليل السلاسل الزمنية من العديد من العيوب أهمها.

1- تركز هذه الطرق على المنطق الرياضي في محاولة لإيجاد دالة رياضية جيدة ممكن أن تستخدم في توفيق البيانات أكثر من اهتمامها بمحاولة استكشاف الخصائص الإحصائية الهامة للسلسلة وأهمها نمط الارتباط الموجود بين مشاهدات السلسلة، فهذه النماذج لاتصف خصائص السلسلة الإحصائية ولكنها مجرد نماذج تنتج المشاهدات $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

2- تفترض هذه الطرق أن التطور طويل الأجل في السلسلة يكون نمطي أو منتظم الشكل وممكن التنبؤ به بشكل كبير.

3- وتفترض أيضاً هذه الطرق عدم وجود ارتباط بين مشاهدات السلسلة، وهذا الفرض من النادر أن يكون متحققاً في مجالات التطبيق المختلفة. بسبب كل هذه العيوب فإن هذه الطرق عادة ما تؤدي إلى تنبؤات غير دقيقة من الناحية الإحصائية.

وبالرغم من الانتقادات التي توجه إلى هذه الطرق فإن لها باع طويل في موضوعات التنبؤ ومازالت تستخدم بكثرة في كافة مجالات التطبيق في البلاد النامية خاصة في الاقتصاد والإدارة والبيئة لأنها وسائل بسيطة وغير مكلفة ولا تحتاج إلى خبرات أو مهارات خاصة من قبل الباحثين أو الدارسين أو متخذي القرارات.

1.6.2 الطرق الحسية Ad Hoc Methods

ذكرنا أن طرق التنبؤ المحددة تعتمد على التعبير عن قيمة السلسلة عند الزمن t أي y_t كدالة رياضية مباشرة في الزمن. وهذا الاتجاه له عيوبه كما ذكرنا وأهمها أنه يفترض عدم وجود علاقة بين مشاهدات السلسلة $y_1, y_2, \ldots, y_n$. الاتجاه الثاني في التنبؤ يعتمد على التعبير عن تنبؤ السلسلة عند الزمن t بدلالة حاضر السلسلة y_t وماضي السلسلة $y_1, y_2, \ldots, y_{t-1}$. فإذا افترضنا أن t تمثل نقطة أصل معينة وأننا نريد التنبؤ بقيمة السلسلة بعد k من الفترات الزمنية فإن الاتجاه الثاني يفترض العلاقة الدالية الآتية

$$\hat{y}_{t+k} = f(y_1, y_2, \ldots, y_{t-1}, y_t) \qquad (1.6.4)$$

ويوجد العديد من الطرق والنماذج التي تنتمي بشكل أو بآخر للصورة (1.6.4) وتعتمد على الحس الإنساني أكثر من اعتمادها على أسلوب إحصائي منظم. ومن أمثلة ذلك

طريقة التنبؤ السطحي وتنبؤ التغير الثابت وطريقة المتوسطات المتحركة البسيطة وطريقة التمهيد الأسي، وفيما يلي نقدم عرضًا مبسطًا لهذه الطرق.

التنبؤ السطحي Naive Forecasting

تستخدم طريقة التنبؤ السطحي قيمة المشاهدة الحالية كتنبؤ مباشر للمشاهدة التالية، أي أن

$$\hat{y}_{t+1} = y_t \qquad (1.6.5)$$

والنموذج (1.6.5) يكون ملائمًا عندما تكون قيم السلسلة ثابتة بشكل تقريبي على الفترة الزمنية موضع الدراسة، ويحدث هذا عندما يغلب على السلسلة الزمنية محل الدراسة الطابع غير النمطي (غير المنتظم) أي عندما تتغير السلسلة بشكل عشوائي كبير لا يتبع نمطًا أو نظامًا أو اتجاهًا معينًا يمكن معه التنبؤ بقيمة السلسلة في الفترة الزمنية التالية، وتعتبر أسعار الأوراق المالية في البورصة أشهر مثال على هذا النوع من السلاسل الزمنية.

والجدير بالذكر أن النموذج السطحي يعطي تنبؤات متحيزة إلى أسفل إذا كانت السلسلة تتزايد باستمرار وذلك لأن التنبؤ $\hat{y}_t$ يكون دائمًا أقل من القيمة y_t، والعكس صحيح أي أن هذا النموذج يعطي تنبؤات متحيزة إلى أعلى إذا كانت السلسلة تتناقص باستمرار لأن التنبؤ $\hat{y}_t$ يكون أكبر من القيمة y_t، ولذلك لا ينصح باستخدام طريقة التنبؤ السطحي في مثل هذه الحالات.

تنبؤ التغير الثابت Constant Change Forecasting

في الكثير من التطبيقات خاصة الاقتصادية منها تتميز بعض السلاسل بثبات في التغيرات المتتالية، فإذا افترضنا أن t تمثل نقطة أصل معينة فإن التغير السابق في السلسلة يكون

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

وإذا كانت $\hat{y}_{t+1}$ تمثل التنبؤ بقيمة السلسلة الزمنية، فإن التغير القادم في السلسلة يقدر كالتالي

$$\hat{\Delta} y_{t+1} = \hat{y}_{t+1} - y_t$$

وبمساواة التغير السابق Δy_t بالتغير اللاحق $\hat{\Delta} y_{t+1}$ نصل إلى

$$\hat{y}_{t+1} - y_t = y_t - y_{t-1}$$

ومن ثم نصل إلى النموذج الآتي

$$\hat{y}_{t+1} = y_t + (y_t - y_{t-1}) \qquad (1.6.6)$$

أي أن التنبؤ في الفترة الزمنية القادمة يساوي القيمة الحاضرة y_t مضافاً إليه قيمة التغير الذي حدث في الفترة السابقة Δy_t.

المتوسطات المتحركة البسيطة Simple Moving Averages

يعتمد النموذج السطحي على القيمة الحالية y_t فقط للتنبؤ بالقيمة التالية y_{t+1}، بينما يعتمد تنبؤ التغير الثابت على أحدث قيمتين y_t، y_{t-1} للتنبؤ بالقيمة التالية y_{t+1}. أما طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة فتستخدم أحدث k قيمة للسلسلة للتنبؤ بالقيمة التالية أي تستخدم القيم $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-(k-2)} + y_{t-(k-1)}$ وذلك بأخذ متوسط هذه القيم كما يلي

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{1}{k}[y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-(k-2)} + y_{t-(k-1)}] \quad ; \quad t = k, k+1, \ldots, n \qquad (1.6.7)$$

وهذا يعني أن

$$\hat{y}_{t+2} = \frac{1}{k}[y_{t+1} + y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-(k-2)}]$$

أي أنه لإيجاد المتوسط المتحرك البسيط $\hat{y}_{t+2}$ نستخدم نفس القيم التي استخدمت في حساب المتوسط السابق له مباشرة $\hat{y}_{t+1}$ بعد إحلال القيمة الأحدث y_{t+1} مكان القيمة الأقدم $y_{t-(k-1)}$. وهذا معنى التحرك أي أن المتوسط يتم تحديثه دائمًا بحذف المشاهدة الأقدم ووضع بدلاً منها المشاهدة التالية. فعلى سبيل المثال إذا كانت $k = 3$ فإنه يمكن تكوين (n -3) متوسط متحرك بسيط مناظر لقيم السلسلة المتاحة كما يلي

$$\hat{y}_4 = \frac{1}{3}[y_3 + y_2 + y_1]$$

$$\hat{y}_5 = \frac{1}{3}[y_4 + y_3 + y_2]$$

$$\hat{y}_6 = \frac{1}{3}[y_5 + y_4 + y_3]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\hat{y}_n = \frac{1}{3}[y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3}]$$

واختيار العدد الصحيح k يعتمد على رأي الباحث وخبرته العملية وهو أحد المشاكل التي تواجه مستخدم طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة. ودقة التنبؤ تعتمد على اختيار العدد الملائم ولذلك يمكن اختيار هذا العدد بطريقة التجربة والخطأ حيث تحسب جميع التنبؤات التي تناظر كل قيمة من قيم k الممكنة $(k = 2, 3, \ldots, n-1)$ وحساب الأخطاء ومن ثم حساب أحد المعايير الهامة لقياس حجم الأخطاء – وليكن متوسط مربعات الأخطاء– المناظر لكل قيمة من قيمk واختيار قيمة k التي تناظر أصغر قيمة لهذا المعيار. وبالرغم من المشاكل التي قد تواجه الباحث عند اختيار قيمة

المـلاءمة k إلا أن العيب الرئيسي لطريقة المتوسطات المتحركة البسيطة هو إعطـاء أوزان متساوية لكل المشاهدات المستخدمة في حساب المتوسط فإذا كانت $k=8$ مثلاً فإن الوزن الذي يعطى للقيمة الحديثة y_t يساوي الوزن الذي يعطى للقيمة الأقدم y_{t-7}. وهذا عادة ما يتعارض مع خصائص السلاسل الزمنية حيث نميل إلى إعطاء المشاهدات الأحدث أوزاناً أكبر. ولذلك يفضل استخدام طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة عندما يغلب الطابع العشوائي على بيانات السلسلة

مثال (3):

الجدول الآتي يوضح قيمة المبيعات السنوية من إحدى السلع بملايين الدولارات في الفترة من السنة 1990 إلى سنة 1998

1998	1997	1996	1995	1994	1993	1992	1991	1990	السنة
9	11	13	9	11	12	10	11	9	قيمة المبيعات

a. استخدام طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة في إيجاد جميع التنبؤات الممكنة مرة باستخدام k=2 ومرة باستخدام k=3 وأوجد متوسط مربعات الأخطاء المناظرة في كل حالة.

b. تنبأ بقيمة المبيعات في سنة 1999

الحـــــل:

		K			
		2		3	
السنة	y_t	$\hat{y}_t$	e_t^2	$\hat{y}_t$	e_t^2
1990	9	-	-	-	-
1991	11	-	-	-	-
1992	10	$\frac{1}{2}[9+11]=10$	0	-	-
1993	12	$\frac{1}{2}[10+11]=10.5$	2.25	$\frac{1}{3}[10+11+9]=10$	4
1994	11	$\frac{1}{2}[12+10]=11$	0	$\frac{1}{3}[12+10+11]=11$	0
1995	9	$\frac{1}{2}[11+12]=11.5$	6.25	$\frac{1}{3}[11+12+10]=11$	4
1996	13	$\frac{1}{2}[9+11]=10$	9	$\frac{1}{3}[9+11+12]=10.67$	5.429
1997	11	$\frac{1}{2}[13+9]=11$	0	$\frac{1}{3}[13+9+11]=11$	0
1998	9	$\frac{1}{2}[11+13]=12$	9	$\frac{1}{3}[11+13+9]=11$	4
1999	?	$\frac{1}{2}[9+11]=10$	-	$\frac{1}{3}[9+13+11]=11$	-

a. إذا كانت k=2

$$MSE = \frac{1}{7}\ [0+2.25+0+6.25+9+0+9]$$

$$= 3.786$$

إذا كانت k=3

$$\text{MSE} = \frac{1}{6}\ [4+0+4+5.429+0+4]$$

$$= 2.905$$

b. ويمكن القول بأن قيمة k=3 أفضل من قيمةk=2 في التنبؤ لأن متوسط مربعـات الأخطاء المناظر أقل ومن ثم فإن

$$\hat{y}_{10} = \frac{1}{3}\ [y_9 + y_8 + y_7] = \frac{1}{3}\ [9+11+13]$$

$$= 11$$

التمهيد الأسي Exponential Smoothing

طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة السابق ذكرها من الطرق الخاصة جداً والتي تفيد فقط إذا كانت بيانات السلسلة يغلب عليها الطابع العـشوائي أي إذا كانـت البيانات تتأرجح بشكل غير نمطي حول متوسط ثابت يمثل مستوى السلسلة على الفترة الزمنية موضع الدراسة. ولكن في الكثير من التطبيقات قد يتغير متوسط الظاهرة ببطء على الفترة الزمنية موضع الدراسة، وفي مثل هذه الحالات قد يكـون مـن المنطقـي إعطاء وزن أكبر لأحدث مشاهدة عند التنبؤ وأوزاناً تتناقص بشكل أو بـآخر بزيـادة عمر المشاهدة أي بزيادة الفاصل الزمني بين زمن المشاهدة والزمن الذي يراد التنبـؤ عنده. وبالطبع يوجد العديد من الدوال الرياضية التي تعكس مفهوم تناقص الأوزان أو الأهميات بزيادة عمر المشاهدة، إلا أن أهم هذه الدوال ما يعرف بالدوال الأسية والتي وجدت أرضية خصبة وممهدة ليس في أدبيات السلاسل الزمنية التقليدية فحسب بل في الأدبيات الحديثة أيضًا. وتعتمد فكرة هذه الدوال على إعطاء وزن ترجيح كبير لأحدث مشاهدة عند الزمن الذي يراد التنبؤ عنده ثم إعطاء أوزان ترجيحية تتناقص بشكل أسي مع زيادة الفاصل الزمني بين زمن التنبؤ وزمن المشاهدة.

إذا افترضنا أننا نقف عند نقطة أصل معينة t ونريد التنبؤ بقيمة الظاهرة عند الفترة الزمنية t+1 وأن هذا التنبؤ يرمز له بالرمز $\hat{y}_t(1)$ ، فإن نموذج التمهيد الأسـي يعرف على الصورة

$$\hat{y}_t(1) = \frac{1}{c}[y_t + wy_{t-1} + w^2 y_{t-2} + \ldots + w^{t-1} y_1] \qquad (1.6.8)$$

حيث

$$o < w < 1 \quad ; c = \sum_{l=o}^{t-1} w^l = \frac{(1-w^t)}{(1-w)}$$

ويسمي العدد w بمعامل التناقص discount coefficient، ويشير الثابـت c إلـى مجموع أوزان الترجيح التي تجعل من النموذج (1.6.8) متوسط حقيقـي. ويعـرف النموذج (1.6.8) عادة في أدبيات السلاسل الزمنية بنموذج المتوسـطات المتحركـة المرجح آسياً exponentially weighted moving average model ويشار إليه عادة بالحروف EWMA. وتعتمد قيمة معامل التناقص w على سرعة التغيـر فـي مستوي السلسلة وعادة ما يكون $0.7 < w < 0.95$

إذا كانت t كبيرة فإن $w^t \to o$ وفي هذه الحالة يمكن إعادة كتابة النمـوذج (1.6.8) على الصورة

$$\hat{y}_t(1) = (1-w)y_t + (1-w)wy_{t-1} + (1-w)w^2 y_{t-2} + \ldots \qquad (1.6.9)$$

وتجدر الإشارة إلى أن $\hat{y}_t(1)$ يمثل بالفعـل متوسـطًا حقيقيـاً لأن مجمـوع أوزان الترجيح$(1-w), (1-w)w, (1-w)w^2, \ldots$ يساوي الواحد الصحيح. كمـا تجـدر الإشارة إلى أن نظام الترجيح(1.6.9) يمكن تعديله باختيار قيم مختلفة للمعاملw، فإذا كانت w كبيرة فإن وزن الترجيح الذي يعطى للمشاهدة الحاليـة y_t يكـون صـغيراً وأوزان الترجيح المتتابعة تتناقص ببطء، أما إذا كانت w صغيرة فإن وزن التـرجيح الذي يعطى للمشاهدة الحالية يكون كبيرًا وأوزان الترجيح المتتابعة تتناقص بـسرعة. فعلى سبيل المثال إذا كانت $w = 0.9$ فإن معـاملات المـشاهدات $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

تكون على الترتيب... ,0.1, 0.09, 0.081 أي أن تأثير المشاهدات يتضاءل ببطء، أما إذا كانت w= 0.1 فإن معاملات نفس المشاهدات $y_t, y_{t-1}, y_{t-2},\ldots$ ستكون على الترتيب ...,0.9, 0.09, 0.009 أي أن تأثير المشاهدات يتضاءل بسرعة بدءًا من المشاهدة الحالية.

ويمكن كتابة التنبؤ عند الفترة الزمنية السابقة(t-1) من الصورة (1.6.9) كما يلي

$$\hat{y}_{t-1}(1) = (1-w)y_{t-1} + (1-w)wy_{t-2} + (1-w)w^2y_{t-3} + \ldots \qquad (1.6.10)$$

وبالتعويض من (1.6.10) في (1.6.9) نصل إلى الصيغة التكرارية (التتابعية) Recurrence Formula الآتية:

$$\hat{y}_t(1) = (1-w)y_t + w\hat{y}_{t-1}(1) \qquad (1.6.11)$$

وتوضح الصيغة (1.6.11) أن التنبؤ الحديث عند الزمن t يساوي الوسط الحسابي المرجح للتنبؤ السابق له مباشرة $\hat{y}_{t-1}(1)$ والمشاهدة الحديثة y_t ووزني الترجيح هما w و (1-w) على الترتيب. وتستأثر المشاهدة الأحدث بالنصيب الأكبر في هذه العلاقة إذا كانت قيمة w صغيرة، بينما تكون مساهمة هذه المشاهدة صغيرة إذا كانت قيمة w كبيرة. وتمكن الصيغة (1.6.11) من حساب التنبؤات للسلسلة بشكل تتابعي كالآتي

$$\hat{y}_1(1) = (1-w)y_1 + w\hat{y}_0(1) \qquad (1)$$

$$\hat{y}_2(1) = (1-w)y_2 + w\hat{y}_1(1) \qquad (2)$$

$$\hat{y}_3(1) = (1-w)y_3 + w\hat{y}_2(1) \qquad (3)$$

$$\vdots$$

بالتعويض من المعادلة (1) في المعادلة (2)

$$\hat{y}_2(1) = (1-w)y_2 + w(1-w)y_1 + w^2\hat{y}_0(1) \qquad (4)$$

بالتعويض من المعادلة (4) في المعادلة (3)

$$\hat{y}_3(1) = (1-w)y_3 + w(1-w)y_2 + w^2(1-w)y_1 + w^3\hat{y}_0(1)$$

بالاستمرار في هذه العملية نصل إلى

$$\hat{y}_t(1) = [(1-w)y_t + w(1-w)y_{t-1} + w^2(1-w)y_{t-2} + \ldots + w^{t-1}y_1] + w^t\hat{y}_0(1) \qquad (1.6.12)$$

وتوضح الصورة (1.6.12) أن التنبؤ عند الفترة الزمنية t يمكن التعبير عنه بدلالة مشاهدات السلسلة المتاحة $y_t, y_{t-1}, \ldots, y_1$ والتنبؤ الابتدائي $\hat{y}_0(1)$. وتجدر الإشارة هنا إلى ملاحظتين أساسيتين حول الصيغة (1.6.12). الملاحظة الأولى أن معاملات المشاهدات $y_t, y_{t-1}, \ldots, y_1$ هي على الترتيب $(1-w), (1-w)w, (1-w)w^2, \ldots, (1-w)w^{t-1}$ وأن هذه المعاملات تقيس مساهمة هذه المشاهدات في التنبؤ $\hat{y}_t(1)$..وكما هو واضح أن هذه المعاملات تعطي أهميات أكبر للمشاهدات الحديثة وتتناقص قيم هذه المعاملات بشكل أسي. والملاحظة الثانية أن المعامل w^t يقيس مساهمة التنبؤ المبدئي $\hat{y}_0(1)$ على التنبؤ $\hat{y}_t(1)$، ومن ثم يتضاءل تأثير التنبؤ المبدئي $\hat{y}_0(1)$ على التنبؤ $\hat{y}_n(1)$ إذا كان طول السلسلة n معقولاً.

ولحساب التنبؤات عادة ما تستخدم الصيغة التكرارية (1.6.11) لسهولة تحديث التنبؤات حيث يكفي معرفة المشاهدة الحديثة والتنبؤ السابق مباشرة. ولحساب التنبؤات يجب معرفة القيمة الابتدائية $\hat{y}_0(1)$ ومعامل التناقص w . بالنسبة لاختيار القيمة الابتدائية يوجد العديد من الطرق لتقديرها أهمها.

1- استخدام الوسط الحسابي لقيم السلسلة $y_1, y_2, \ldots, y_n$، وهذه الطريقة عادة ما تكون ملاءمة إذا كان متوسط السلسلة يتغير ببطء على الفترة الزمنية موضع الدراسة.

2- ويفضل بعض الباحثين استخدام المشاهدة الأولي y_1 كتقدير للقيمة الابتدائية.

3- استخدام الوسط الحسابي لبعض المشاهدات الأولى لتقدير هذه القيمة.

للمزيد من التفاصيل حول اختيار القيمة الابتدائية يمكن للقارئ الرجوع إلى Brown (1962) أو إلى Montgomery and Johnson (1976) أو إلى Abraham and Ledolter (1983) أو إلي Bowerman and O'Connell (1987)

ويستأثر معامل التناقص w بأهمية خاصة في التأثير على التنبؤ $\hat{y}_t(l)$ ومن ثم يحظى هذا المعامل بأهمية خاصة عند اختياره. وهناك بعض الخطوط العامة التي يمكن الاسترشاد بها عند هذا الاختيار والخاصة بسرعة التقلبات التي تحدث في السلسلة. فإذا كانت السلسلة تتعرض للكثير من التقلبات غير المنتظمة فقد يكون من الأفضل استخدام قيمة كبيرة للمعامل w وذلك من أجل إعطاء وزن وأهمية للتنبؤ السابق $\hat{y}_{t-1}(l)$ أكبر من وزن المشاهدة الحديثة y_t، ويؤدي هذا إلى التخلص من الأخطاء العشوائية والحصول على تنبؤات مستقرة. أما إذا كانت السلسلة أكثر هدوءًا واستقرارًا أو يوجد تغير منتظم في نمط السلسلة فقد يكون من الأفضل اختيار قيمة صغيرة للمعامل w وذلك من أجل إعطاء وزن أكبر للمشاهدة الحديثة. ولكن هذه الخطوط العامة لا تمكن بالطبع من اختيار قيمة دقيقة لهذا المعامل في التطبيقات العملية ولذلك عادة ما يتم اختيار هذا المعامل عن طريق المحاكاة simulation في مثل هذه التطبيقات حيث يتم توليد تنبؤات مختلفة للمعامل w ثم تقارن هذه التنبؤات بالقيم العملية للسلسلة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ لحساب الأخطاء المناظرة لكل قيمة من قيم المعامل w. بعد ذلك يتم حساب أحد المقاييس التي سبق دراستها لقياس حجم الأخطاء

وليكن مجموع المربعات المناظر لكل قيمة من قيم w، وتكون قيمة المعامل w المناسبة هي القيمة التي تجعل هذا المجموع أقل مايمكن. وطريقة المحاكاة ليست الطريقة الوحيدة المعروفة لاختيار قيمة w ولكن هناك طرق أخرى أهمها ما يعرف بطريقة التجربة والخطأ trial and error ، ولن نتعرض لدراسة هذه الطريقة هنا ولكن يمكن للقارئ الرجوع إلى Gaynor and Kirkpatrick (1994) للتعرف عليها والمثال الآتي يوضح كيفية استخدام طريقة التمهيد الأسي في التنبؤ.

مثال (4):

البيانات الآتية تمثل عدد الأجهزة (بالمائة)المباعة التي سجلت شهرياً في دفاتر إحدى الشركات

11 12 12 14 13 15 14 15 13 17 16 14 16

قدر القيمة الابتدائية $\hat{y}_0(1)$ باستخدام الوسط الحسابي لقيم السلسلة ثم استخدم هذه القيمة لإيجاد التنبؤات المناظرة مرة باستخدام $w = 0.7$ ومرة أخرى باستخدام $w = 0.9$. أي التنبؤات أفضل؟ اشرح سبب أجابتك.

الحـــل:

$$\hat{y}_0(1) = \bar{y} = \frac{1}{13}[11 + 12 + 12 + \ldots + 16] = 14$$
$$\hat{y}_t(1) = (1 - w)y_t + w\hat{y}_{t-1}(1)$$

إذا كانت $w = 0.7$

$$\begin{aligned}\hat{y}_1(1) &= 0.3\,(y_1) + 0.7\,\hat{y}_0(1)\\ &= 0.3\,(11) + 0.7\,(14) = 13.1\end{aligned}$$

$$\hat{y}_2(1) = 0.3\,(y_2) + 0.7\ \hat{y}_1(1)$$
$$= 0.3\ (12) + 0.7\ (13.1) = 12.77$$

$$\hat{y}_3(1) = 0.3\,(y_3) + 0.7\,\hat{y}_2(1)$$
$$= 0.3\,(12) + 0.7\,(12.77) = 12.539$$

وبالاستمرار في هذه العملية يمكن توليد التنبؤات الموضحة في جدول (1)

إذا كانت $w = 0.9$

$$\hat{y}_1(1) = 0.1\,y_1 + 0.9\ \hat{y}_0(1)$$
$$= 0.1\,(11) + 0.9\ (14) = 13.7$$

$$\hat{y}_2(1) = 0.1\,y_2 + 0.9\ \hat{y}_1(1)$$
$$= 0.1\,(12) + 0.9\,(13.7) = 13.53$$

$$\hat{y}_3(1) = 0.1\,y_3 + 0.9\,\hat{y}_2(1)$$
$$= 0.1\,(12) + 0.9\,(13.53) = 13.377$$

وهكذا يمكن توليد باقي التنبؤات والموضحة في جدول (1)

جدول (1): القيم الفعلية والتنبؤات لبيانات المثال (4)

t	y_t	التنبــــــؤات		$e^2_t = [y_t - \hat{y}_{t-1}(1)]^2$	
		W =0.7	w = 0.9	w = 0.7	w = 0.9
1	11	14	14	9.00	9.00
2	12	13.1	13.7	1.21	2.89
3	12	12.77	13.53	0.59	2.34
4	14	12.539	13.38	2.13	0.38

5	13	12.98	13.34	0.00	0.12
6	15	12.98	13.51	4.08	2.22
7	14	13.59	13.66	0.17	0.12
8	15	13.17	13.69	3.35	1.72
9	13	14.10	13.82	1.21	0.67
10	17	13.77	13.74	10.43	10.63
11	16	14.74	14.07	1.59	3.72
12	14	15.12	14.26	1.25	0.07
13	16	14.78	14.23	1.49	3.13
		15.15	14.41	-	-

بفحص نتائج الجدول (1) نجد أن مجموع مربعات الأخطاء المناظرة للقيمة $w = 0.7$ هو

$$S(0.7) = 9 + 1.121 + 0.59 + \ldots + 1.4\ 9$$

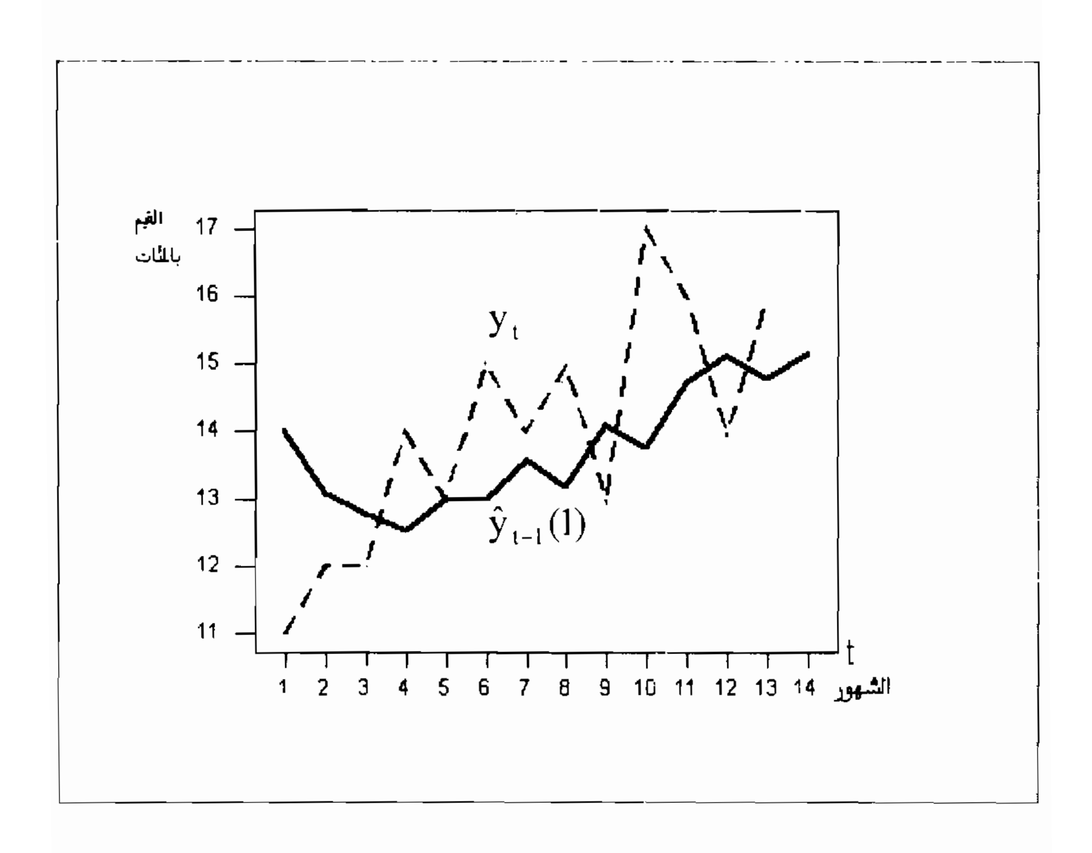
$$= 35.5$$

وبالمثل فإن مجموع مربعات الأخطاء المناظرة للقيمة $w = 0.9$ هو

$$S(0.9) = 9 + 2.8\ 9 + 2.34 + \ldots + 3.13$$

$$= 37.01$$

حيث إن $S(0.7) < S(0.9)$ يمكن القول بأن التنبؤات المناظرة لقيمة $w = 0.7$ أفضل من التنبؤات المناظرة لقيمة $w = 0.9$ ، ويكون التنبؤ بعدد الأجهزة المباعة في الشهر التالى هو 1515 جهازًا ويعرض شكل (7) القيم الفعلية والتنبؤات التي حصلنا عليها إذا كانت $w= 0.7$



شكل(7): القيم الفعلية والتنبؤات لمثال (4)

ويلاحظ من شكل (7) أن سلسلة التنبؤات أكثر تمهيدًا ونعومة من السلسلة الأصلية.

وقد أوجد نموذج المتوسطات المتحركة المرجح أسيًا لنفسه طريقًا ممهدًا في الكثير من تطبيقات وأدبيات التنبؤ في مجالات المعرفة المختلفة خاصة الاقتصادية والإدارية منها وذلك لعدة أسباب. السبب الأول هو سهولة تطبيقه وتحديث تنبؤاته باستخدام التنبؤ السابق والمشاهدة الأحدث فقط، وهذا السبب هو أحد الأسباب الهامة لانتشار طريقة التمهيد الأسي في هذه المجالات خاصة عند التنبؤ بالعديد من السلاسل الزمنية كما هو الحال عند التنبؤ بمبيعات الآلاف من السلع المختلفة الموجودة في أحد

المحلات العملاقة. السبب الثاني في هذا الانتشار يعود إلى آلية الطريقة الكاملة فبمجرد برمجة الخطوات الرئيسية واختيار قيمة المعامل w يمكن الحصول على التنبؤات دون تدخل الإرادة الإنسانية، هذه الميزة بالذات هامة جدًا لمستخدمي الإحصاء في مجالات المعرفة المختلفة والذين يبحثون دائمًا عن أساليب لا تتطلب مهارات وخبرات خاصة. السبب الثالث وراء انتشار هذه الطريقة هو سهولة برمجة خطواتها الرئيسية وانخفاض تكاليف استخدامها مقارنة باستخدام النماذج العشوائية الحديثة. السبب الرابع أن استخدام هذه الطريقة لا يتطلب توافر عدد كبير من المشاهدات ولذلك وجدت هذه الطريقة أرضًا خصبة في البلاد النامية حيث تعاني معظم هذه البلاد من عدم توافر الحد الأدنى من المشاهدات الضروري لاستخدام النماذج العشوائية الحديثة.

وتتعرض طريقة التمهيد الأسي للعديد من الانتقادات، أولها عدم وجود منهجية عامة للاختيار بين أنظمة الترجيح البديلة وعدم وجود طريقة عامة لتقويم نظام الترجيح المختار. والانتقاد الثاني الذي يوجه إلى هذه الطريقة أنها تعالج كل السلاسل الزمنية التي تنشأ في الواقع بطريقة واحدة ولذلك فهي قد تؤدي إلى تنبؤات غير صالحة. والانتقاد الثالث الذي يوجه إلى هذه الطريقة أنه ليس من السهل دائمًا اختيار المعامل w بدقة وعدم وجود طريقة وحيدة لاختيار هذا المعامل والتقدير المبدئي $\hat{y}_0(1)$، ولذلك فإن التنبؤات التي نحصل عليها من هذه الطريقة قد تختلف من باحث إلى آخر. الانتقاد الأخير والهام أن هذه الطريقة تعتبر من الطرق الخاصة وذلك لأنها تكون ملاءمة فقط إذا كانت العملية العشوائية الكامنة في البيانات لها مواصفات خاصة. بصورة أكثر تحديدًا يمكن القول بأن هذه الطريقة تعمل بصورة جيدة إذا كانت العملية العشوائية تنتمي إلى فئة جزئية فقط من النماذج العشوائية الحديثة والتي لها مواصفات خاصة والتي تكون مفيدة في بعض المواقف وغير المفيدة في مواقف أكثر.

1.6.3 السلاسل الزمنية العشوائية Stochastic Time Series

تعد أساليب وطرق التنبؤ السابق ذكرها في المبحثين الفرعيين السابقين من قبيل الأساليب البسيطة والتقليدية، ولا يرقى أي منها لأن يكون منهجية إحصائية

منظمة لتحليل السلاسل الزمنية. أما نماذج السلاسل الزمنية العشوائية فتقدم طرقًا أكثر تعقيدًا للتنبؤ تتيح إمكانية استحداث منهجية إحصائية منظمة لتحليل السلاسل الزمنيـــة. ويفترض النموذج العشوائي دائمًا وجود عملية عشوائية stochastic process نظرية قادرة على توليد السلسلة الزمنية المتاحة التي بين أيدينا. مثل هذا النموذج إذا افترض نظريًا أنه استخدم لتوليد مجموعات عديدة من السلاسل الزمنية علـــى نفـــس الفتـــرة الزمنية موضع الدراسة فإن كل مجموعة ســـتكون مختلفـــة عـــن الأخـــرى ولكـــن المجموعات كلها تتبع نفس القواعد والقوانين الاحتمالية شأنها في ذلك شأن المجتمـــع والعينة في علم الإحصاء حيث يمكن سحب العديد من العينات المختلفـــة مـــن نفـــس المجتمع ولكن هذه العينات تخضع لنفس القواعد والقوانين الاحتمالية للمجتمع.

ومن ثم فـــإن الأســـلوب المقتـــرح هنـــا يفتـــرض أن مـــشاهدات السلـــسلة $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ والتي تم رصدها في الفترة الزمنية موضع الدراســـة $(1,2,\ldots,n)$ هي قيمة a realization سحبت من متغير عشوائي متعدد الأبعاد $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ - يمثل جميع القيم متعددة الأبعاد- له توزيـــع احتمـــال تراكمـــي $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ يستخدم لعمل استدلالات إحصائية حول مستقبل العملية العشوائية. وكما هو معـــروف في علم الإحصاء أن معرفة أو تحديد مثل هذا التوزيع الاحتمالي يعد من الأمور بالغة الصعوبة أو المستحيلة، ولكن من المعتاد إنشاء نموذج لوصف وشرح سلوك السلـــسلة يمكن استخدامه بكفاءة. وتعتمد هذه الكفاءة على مدي قـــدرة النمـــوذج علـــى عكـــس خصائص التوزيع الاحتمالي الحقيقي.

وبناء النماذج العشوائية وتطوير منهجية حديثة لتحليـــل الـــسلاسل الزمنيـــة المتقطعة واستخدامها في مجالات التطبيق المختلفة هي المحاور الرئيسية التي يـــدور حولها هذا الكتاب بدءًا من الباب الثاني وحتى نهاية الباب الأخير حيث يعرض البـــاب الثاني المفاهيم الأساسية لفهم مفردات المنهجية الإحصائية الحديثة لتحليـــل الـــسلاسل الزمنية المتقطعة، ويعرض الباب الثالث عائلة خاصة وفريدة من النمـــاذج العـــشوائية التي تظهر في مجالات التطبيق المختلفة والتي تعرف في أدبيات الـــسلاسل الزمنيـــة

بنماذج ARMA أو نماذج ARIMA والتي تعتبر مسرح الأحداث الـــذي احتـــضن المنهجية الحديثة للسلاسل الزمنية، ويعرض الباب الرابع مراحـــل التحليـــل الحـــديث للسلاسل الزمنية المتقطعة والذي قدمه العالمان جـــورج بـــوكس G. Box وجـــويلم جينكنز G. Jenkins في كتابهما عام 1976 والذي يعد في الفكر الإحصائي واحد من أهم أمهات الكتب في السلاسل الزمنية، ويقدم الباب الخامس والأخير تطبيقًـــا عمليًـــا لكيفية استخدام منهجية السلاسل الزمنية الحديثة لنمذجة السلسلة الخاصة بعدد الحجاج السنوي والتنبؤ بمشاهداتها المستقبلية.

1.7 مركبات السلسلة الزمنية Time Series Components

وجدنا سابقًا أن أحد أهداف دراسة السلسلة الزمنية هو وصف الظاهرة موضع الدراسة والتعرف على التغيرات المختلفة التي طرأت عليها خلال الفترة الكلية المتاحة بسبب العوامل (المؤثرات) المختلفة التي تتعرض لها الظاهرة. وفي واقع الأمر يمكن القول أن التغيرات التي تطرأ على الظاهرة من فترة زمنية لأخرى تحدث بسبب أربعة أنواع من العوامل (المؤثرات) المختلفة هي الاتجاه العام والعوامل الموسمية والعوامل الدورية والعوامل العارضة حيث يؤثر كل نوع من هذه العوامل على الظاهرة عند أي فترة زمنية بشكل معين وفي اتجاه معين وبدرجة معينة. وقد تتأثر السلسلة الزمنية بهذه العوامل (المؤثرات) مجتمعة أو ببعض هذه العوامل (المؤثرات) فقط. وتعرف العوامل الثلاثة الأولي (الاتجاه العام – العوامل الموسمية – العوامل الدوريـــة) بالعوامـــل أو المؤثرات الرئيسة أو المنتظمة في السلسلة وهي التي يمكن دراستها واكتشاف أنماطها والتنبؤ بها في المستقبل، بينما تعرف العوامل العارضة بالعوامل غير الرئيسة أو غير المنتظمة في السلسلة وهي التغيرات غير النمطية التي لا يمكن اكتشافها أو التنبؤ بها. وقد جرت العادة على تصنيف التغيرات التي تطرأ على الظـــاهرة موضـــع الدراســـة حسب العوامل أو المؤثرات التي تسبب هذه التغيرات، وتأخذ هذه التغيرات في أدبيات السلاسل الزمنية أسماء عديدة، فتارة تعرف بمؤثرات السلاسل الزمنية، وتارة أخـــرى تعرف بعناصر السلاسل الزمنية، وتارة ثالثة تعرف بمركبات السلاسل الزمنية وهـــو

المصطلح الذي ارتضيناه في هذا الكتاب، وفيما يلي نقدم عرضًا مبسطًا لكل مركبة من مركبات السلاسل الزمنية

1.7.1 الاتجاه العام Secular Trend

عند فحص نمط التغير للظاهرة موضع الدراسة من خلال المنحني الزمني (أو من خلال البيانات) كثيرًا ما يلاحظ وجود تغيرات بطيئة وتدريجية على المدى القصير (بالزيادة أو النقصان) وميل عام إلى التزايد على المدى الطويل كما يحدث عادة في السلسلة الخاصة بعدد المواليد السنوي في مصر أو السلسلة الخاصة بعدد الحجاج أو السلسلة الخاصة بأسعار إحدى السلع السنوية، ويقال في هذه الحالة أن للظاهرة اتجاهًا عامًا بالزيادة. وعلى العكس قد يلاحظ وجود تغيرات بطيئة وتدريجية على المدى القصير (بالزيادة أو النقصان) وميل عام إلى التناقص على المدى الطويل كما يحدث عادة في السلسلة الخاصة بمعدل الوفيات السنوي أو السلسلة الخاصة بالمخزون من البترول أو من أحد المعادن أو السلسلة الخاصة بمرض معين أو السلسلة الخاصة بالاستهلاك السنوي من سلعة آخذة في الانقراض مثل التلفاز غير الملون، ويقال في هذه الحالة أن للظاهرة اتجاها عامًا بالنقصان. وقد يكون للظاهرة اتجاهًا عامًا بالتزايد في البداية واتجاهًا عاما بالتناقص في نهاية الفترة الزمنية. ومن ثم يمكن تعريف الاتجاه العام في السلسلة بأنه التحركات الصاعدة أو الهابطة في مستوى السلسلة على المدى الطويل ويعرف عادة بتغيرات المدى الطويل long time variations .

والاتجاه العام هو محصلة مجموعة أخرى من العوامل أو المؤثرات الهامة، فالزيادة في مستوى عدد الحجاج هو انعكاس للزيادة المتصلة في عدد المسلمين والارتفاع في مستوي المعيشة وانتشار الوعي الديني وغيرها من العوامل التي تحدد عدد الحجاج، والزيادة المتصلة في مبيعات إحدى السلع قد تحدد بعوامل كثيرة مثل التزايد المستمر في عدد السكان والتغيرات الفنية التي تحدث في إنتاج السلعة والتغيرات التي تحدث في أذواق المستهلكين. وعادة ما يمكن تقريب الاتجاه العام

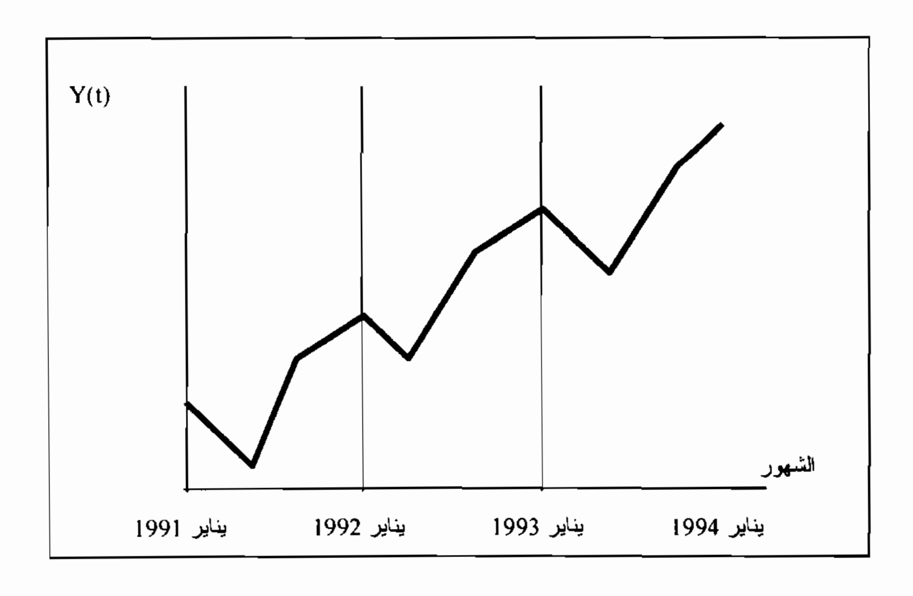
بواسطة كثيرة حدود أو دالة أسية في الزمن كما في الأشكال (4) و (5) و(6). فالشكل (4.a) يعرض سلسلة لها اتجاه عام بالزيادة يمكن التعبير عنه في شكل خطي في الزمن له ميل موجب، ويعرض الشكل (4.b) سلسلة لها اتجاه عام بالنقصان يمكن التعبير عنه في شكل خطي في الزمن ميله سالب، ويعرض الشكل (5) سلسلة زمنية لها اتجاه عام من الدرجة الثانية، بينما يعرض الشكل (6) سلسلة لها اتجاه عام يأخذ شكل دالة أسية في الزمن.

وفي واقع الأمر أن تعريف الاتجاه العام في حالة السلاسل المحدودة يكون في غاية الصعوبة وقد يحدث لبس في التطبيقات العملية بين الاتجاه العام والنظام الدوري الذي قد تتصف به الظاهرة. فعلى سبيل المثال افترض أننا بصدد تسجيل متوسط درجة الحرارة كل ساعة في مكان معين بدءًا من الساعة الرابعة صباحًا وحتى الساعة الثالثة مساءً. عند عرض هذه البيانات فقط بيانيًا ستظهر بالطبع اتجاهًا عامًا بالزيادة ولكن إذا تم اعتبار هذا الجزء ضمن سلسلة من القراءات التي أخذت في عدة أيام فإن هذا الجزء سيظهر فقط كجزء صاعد من الدورة التي تحدث لدرجة الحرارة كل يوم وقد لا يكون للسلسلة ككل اتجاه عام بالزيادة. ولا يخفى على القارئ العواقب الوخيمة إذا تم استكمال هذا الجزء للتنبؤ خارج الفترة الزمنية المعرف عليها، ومن ثم قد يكون من الأفضل التخلص من أثر النظام الدوري الذي قد يعتري السلسلة قبل دراسة وتقدير الاتجاه العام كما سنرى في معرض الحديث عن طريقة التجزئ. وللمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع إلى Granger and Newbold (1974) أو إلى Bowermen and O'Connell (1987).

1.7.2 التغيرات الموسمية Seasonal Variations

ويطلق عليها أحياناً التقلبات الموسمية وهي التغيرات التي تؤدي إلى حدوث نمط دوري periodical pattern كامل في السلسلة يتكرر بانتظام بعد عدد معين من الفترات الزمنية يشار إليه عادة بالرمز s . وتسمي السلسلة من هذا النوع سلسلة زمنية

موسمية seasonal time series ذات دورة period طولها s. ويختلف طول الدورة s باختلاف طبيعة البيانات، فقد يساوي 12 إذا كانت البيانات شهرية، وهنا يتكرر النظام الدوري بعد كل 12 شهر أي على أساس سنوي، وأوضح مثال على ذلك السلسلة الخاصة بمتوسط درجة الحرارة الشهرية والذي يكون عادة أقل ما يمكن في شهري يناير وفبراير ويبدأ في الزيادة التدريجية من شهر مارس ويبلغ ذروته عادة في شهري يوليو وأغسطس ثم يبدأ في التناقص مرة أخرى حتى يصل إلى أدني قيمة له في شهري يناير وفبراير كما كان، ثم يتكرر هذا النظام الدوري كل سنة. وقد يساوي طول الدورة 4 عندما تكون البيانات ربع سنوية –وتسمى عادة بيانات فصلية– وهنا يتكرر النظام الدوري بعد أربعة فصول على أساس سنوي أيضًا، وأوضح مثال لذلك المبيعات الربع سنوية (الفصلية) من الملابس الصوفية والتي تكون عادة أقل ما يمكن في فصل الصيف وتبدأ في الزيادة في فصل الخريف وتبلغ ذروتها في فصل الشتاء ثم تبدأ في التناقص مرة أخرى حتى تصل إلى أدنى قيمة لها في فصل الصيف، ويتكرر هذا النظام الدوري كل سنة (أنظر الشكل (8)).



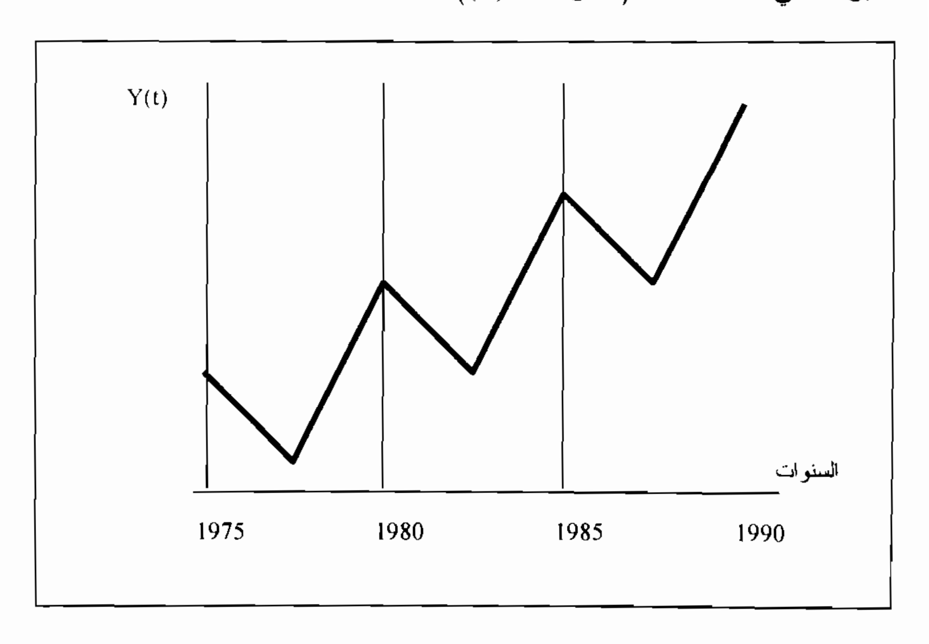
شكل (8): التغيرات الموسمية

ولا يخفى على القارئ أن النظام الموسمي في السلسلة قدم يحدث كل أسبوع وذلك عند حدوث تغيرات موسمية في أيام معينة من الأسبوع كما يحدث عادة في المبيعات الأسبوعية لأحد المطاعم الشهيرة، فعادة ما تبلغ هذه المبيعات ذروتها في أيام الأجازات الأسبوعية وتقل في باقي الأيام. كما يمكن تصور حدوث نظام موسمي على أساس يومي إذا حدثت تغيرات موسمية في ساعات معينة كل يوم، فعدد حوادث المرور عادة ما يأخذ شكل موسمي كل يوم، فعادة ما يبلغ هذا العدد ذروته في ساعات معينة من فترتي الصباح والظهيرة ويقل في باقي الساعات. كما لا يخفى على القارئ أيضًا أن الأسباب الرئيسية لحدوث التغيرات أو التقلبات الموسمية هي الطقس أو المناخ والعادات والتقاليد، فالطقس هو الذي يعطي الطبيعة الموسمية للمبيعات ربع السنوية للملابس الصوفية حيث يزيد الإقبال على هذه السلع في الشتاء بسبب الطقس البارد ويقل الإقبال عليها في الصيف بسبب الطقس الحار، كما أن العادات والتقاليد هي التي تعطي الطبيعة الموسمية للسلسلة الشهرية الخاصة بعدد المعتمرين حيث يزداد عدد المعتمرين بشكل واضح في شهري رجب وشعبان ويصل ذروته في شهر رمضان ثم لا يلبث أن يتناقص مرة أخرى، ويتكرر هذا النظام الموسمي كل سنة هجرية.

وقد يكون من المفيد أن نلفت نظر القارئ إلى عدد من الملاحظات الخاصة بالتغيرات الموسمية. الملاحظة الأولى أنه ليس كل السلاسل المقاسة على وحدات أقل من سنة سلاسل موسمية فقد نجد سلسلة شهرية أو ربع سنوية غير موسمية مثل السلسلة الخاصة بمبيعات الخبز والسلسلة الخاصة بعدد المواليد أو عدد الوفيات والسلسلة الخاصة بعدد المصابين بالأورام الخبيثة وغيرها. الملاحظة الثانية أن السلسلة الموسمية قد يكون أولا يكون لها اتجاه عام وذلك لأن المؤثرات التي تعمل على هاتين المركبتين مختلفة. الملاحظة الثالثة أن التغيرات الموسمية تعرف أحيانًا بتغيرات المدى القصير تمييزًا لها عن تغيرات المدى الطويل أو الاتجاه العام لأنها تحدث داخل الوحدة الزمنية (سنة- أسبوع- يوم- ....).

1.7.3 التغيرات الدورية Cyclical Variations

وهي تغيرات تؤدي إلى حدوث نمط دوري في السلسلة يتكرر كل فترة زمنية طويلة (سنتين أو أكثر)، وهي في ذلك تشبه التغيرات الموسمية، إلا أنها تختلف عن هذه التغيرات في العديد من الأوجه. الاختلاف الأول أن طول الدورة التي تحدثها هذه التغيرات أكبر كثيرًا من طول الدورة الموسمية وعادة ما يكون خمس أو عشر سنوات ولذلك تسمى هذه التغيرات بالتغيرات طويلة الأجل. الاختلاف الثاني هو أسباب حدوث هذه التغيرات حيث أن هذه التغيرات تعكس آثار الدورات والتقلبات الاقتصادية من حيث الكساد أو الرواج للظواهر الاقتصادية. الاختلاف الثالث أن طول هذا النوع من الدورات لا يمكن تحديده بشكل دقيق، فهذا النوع من التقلبات يتسم بعدم الانتظام بشكل أدى إلى عدم الاعتماد على تقديره من البيانات الزمنية في التنبؤ خاصة أن هذا النوع من التغيرات يحتاج إلى فترة طويلة لاكتشافه وتقديره، ولن نتعرض لتقدير هذه التغيرات في هذا الكتاب (أنظر شكل(9)).



شكل (9): التغيرات الدورية

1.7.4 التغيرات غير المنتظمة (العشوائية) Irregular Variations

وتختلف هذه التغيرات عن كل التغيرات السابق ذكرها في أنها لا يمكن التنبؤ بها لأنها لا تحدث طبقًا لقاعدة أو نظام أو قانون معين، فهي تغيرات غير عادية تسبب اهتزازات فجائية في الظاهرة بالارتفاع أو الانخفاض، وتتصف هذه التغيرات بأنها لا تستمر طويلاً ولذلك فهي تسمى بالتغيرات قصيرة الأجل ومن أسباب هذه التغيرات الحروب والكوارث والزلازل والبراكين والحرائق والسيول والفيضانات والإضرابات العمالية وغيرها.

1.8 قياس الاتجاه العام

الاتجاه العام هو أهم مركبة من مركبات السلسلة الزمنية ويمثل التغير طويل الأجل في السلسلة، وقياسه هام لأسباب ثلاثة هي:

1- يمكننا من معرفة الكيفية التي تتطور بها الظاهرة على المدى الطويل.

2- يساعد في التنبؤ بما سيكون عليه حال القيم المستقبلية.

3- يستخدم في حذف أثر الاتجاه العام من السلسلة ومن ثم يمكن دراسة التغيرات الأخرى بشكل أفضل.

وتعتمد الطرق التقليدية في قياس الاتجاه العام على توفيق ما يعرف بمنحنى الاتجاه العام. وتوجد طرق عديدة لتوفيق مثل هذا المنحنى بعضها بدائي يعتمد على النظر والتمهيد باليد والبعض الآخر يعتمد على التمهيد بواسطة المتوسطات للتخلص من التغيرات غير المنتظمة والبعض الثالث يعتمد على تحليل الانحدار والذي يرتبط بالنظرية الإحصائية. وسندرس هنا أهم طريقتين لقياس الاتجاه العام وهما طريقة الانحدار وطريقة المتوسطات المتحركة. وسنفترض هنا أن بيانات السلسلة الزمنية يمكن تجزئتها إلى مركبتين فقط إحداهما أساسية وهي مركبة الاتجاه العام وهي

المركبة المنتظمة الوحيدة في السلسلة والتي يمكن تقديرها والأخرى التغيرات غير المنتظمة والتي لا يمكن تقديرها أو التنبؤ بها. ومن ثم إذا كانت الظاهرة موسمية الطبيعية فإن ما سنعرضه هنا يفترض أنه قد تم التخلص من التغيرات الموسمية أولاً

1.8.1 تحليل الانحدار Regression Analysis

أسلوب الانحدار من أهم الطرق التقليدية في تقدير الاتجاه العام. ويعتمد الأسلوب على تحديد معادلة رياضية غير عشوائية $f(t)$ لتمثيل الاتجاه العام، ومن ثم يفترض هذا الأسلوب أن النموذج الملائم لدراسة تطور الظاهرة يمكن كتابته على الصورة

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t \qquad (1.8.1)$$

حيث $f(t)$ دالة في الزمن تمثل مركبة الاتجاه العام، ويفترض الأسلوب المقترح هنا أن هذه الدالة محددة deterministic أي غير عشوائية على غرار النماذج المحددة التي سبق دراستها في معرض الحديث عن طرق التنبؤ. وعادة ما يمكن التعبير عن هذه الدالة عن طريق كثيرة حدود أو صورة أسية، وبالطبع توجد صور أخرى لهذه الدالة يمكن استخدامها ولكننا لن نتعرض لها هنا. ويعتمد اختيار الدالة $f(t)$ بصورة عامة على رسم شكل الانتشار للظاهرة في مقابل الزمن وعلى خبرة الباحث وقدرته على استخدام مفاهيم الاستدلال الإحصائي ووسائل التشخيص الضرورية لدراسة ملاءمة الشكل المختار وتأكيده أو تعديله بما يتلاءم مع مخرجات الاستدلال الإحصائي والتشخيص. أما ε_t في النموذج(8.1.1) فتمثل التغيرات العشوائية التي تعبر عن التغيرات غير المنتظمة في السلسلة والتي اصطلح على تسميتها بالأخطاء العشوائية. وتفترض الطرق المقترحة هنا أن هذه المتغيرات غير مرتبطة ولها توقع ثابت يساوي الصفر وتباين ثابت يرمز له عادة بالرمز σ^2. وفرض عدم ارتباط هذه المتغيرات

يعادل القول بعدم ارتباط مشاهدات السلسلة y_t. وعادة ما يفترض اعتيادية الأخطاء العشوائية عند إجراء الاستدلالات الإحصائية المختلفة.

الاتجاه الخطي Linear Trend

تظهر الكثير من الظواهر التي تنشأ في مجالات المعرفة المختلفة اتجاهًا عامًا خطيًا مع الزمن على المدى الطويل، وفي مثل هذه الحالات يمكن كتابة النموذج الملاءم على الصورة

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \qquad (1.8.2)$$

حيث تمثل y_t قيمة الظاهرة عند الفترة الزمنية t، والثابتان β_0, β_1 يمثلان معلمتي النموذج أو معاملي الانحدار. ويكون النموذج ملاءمًا إذا كان مستوى السلسلة يتغير بمقدار ثابت بتغير الزمن فترة زمنية واحدة. وينحصر تقدير الاتجاه العام في تقدير معلمتي النموذج β_0, β_1 . ويذكرنا هذا النموذج على الفور بنموذج الانحدار الخطي البسيط حيث يلعب المتغير $t = 1,2,\ldots,n$ دور المتغير المستقل، ومن ثم يمكن كتابة النموذج (8.1.1) في صورة مصفوفات كما يلي

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad (1.8.3)$$

حيث Y متجه عمودي من الرتبة n يحتوى على مشاهدات السلسلة، أي أن

$$Y = [y_1 \quad y_2 \ldots y_n]'$$

والمصفوفة X من الرتبة $n \times 2$ ، عناصر عمودها الأول كلها تساوي الواحد الصحيح، وعناصر عمودها الثاني هي القيم المختلفة للوحدات الزمنية وتساوي دائمًا الأعداد $1,2,\ldots,n$ بغض النظر عن طبيعة الوحدات الزمنية المستخدمة (سنة – شهر– يوم–....)، أي أن

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{bmatrix}$$

أما المتجه العمودي β فهو من الرتبة 2 ويحتوي على معلمتي النموذج، أي أن

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

والمتجه العمودي ε من الرتبة n ويحتوي على المتغيرات ε_t أي أن

$$\varepsilon = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \ldots \quad \varepsilon_n]'$$

بافتراض صحة النموذج (8.1.3) تخبرنا دراسة الانحدار أن تقدير المربعات الصغرى لمتجه المعالم هو

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \qquad (1.8.4)$$

حيث

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} t \\ \sum_{t=1}^{n} t & \sum_{t=1}^{n} t^2 \end{bmatrix}; \qquad X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} t y_t \end{bmatrix}$$

ويكون متجه القيم المقدرة كالتالي

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

ومتجه البواقي هو

$$e = \hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y}$$

ومجموع مربعات البواقي هو

$$SSE = e'e = \sum_{t=1}^{n} e_t^2$$

$$= \sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2 = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

وتقدير تباين الأخطاء هو

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-2}$$

وتقدير تباين مقدرات المربعات الصغرى هو

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = s^2 (X'X)^{-1} = s^2 C$$

حيث

$$C = (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

ومن ثم يكون تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t \quad ; \quad t = 1,2,\ldots,n \qquad (1.8.5)$$

ويمكن استخدام معادلة الاتجاه العام المقدرة (8.1.5) في تقدير الاتجاه العام للظاهرة لكل الفترات الزمنية المتاحة بالتعويض المتتالي عن قيم $t = 1,2,\ldots,n$ فنحصل على القيم الاتجاهية $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n$. فضلاً عن ذلك يمكن استخدام هذه المعادلة في التنبؤ بما سيكون عليه الاتجاه العام للظاهرة في فترات زمنية غير موجودة ولكنها قريبة من نطاق الزمن المستخدم، فإذا كنا نرغب – على سبيل المثال– في التنبؤ بالاتجاه العام عند الزمن $t = t_0$ نعوض بهذه القيمة في المعادلة المقدرة (8.1.5) لنحصل على تنبؤ

الاتجاه المناظر $\hat{y}_0$. كما يمكن إنشاء فترة ثقة للاتجاه العام الحقيقي عند الزمن $t = t_0$ بافتراض اعتيادية normality الأخطاء ε_t كما يلي

$$\hat{y}_0 \pm t_{\alpha/2,n-2} s\ [1 + x_0^{'}(X^{'}X)^{-1}x_0]^{\frac{1}{2}}$$

حيث

$$x_0^{'} = [1 \quad t_0]$$

ويشير الرمز $t_{\alpha/2,n-2}$ إلى القيمة الجدولية التي نحصل عليها من توزيع t بدرجات حرية (n-2) وتحصر على يمينها مساحة مقدارها $\frac{\alpha}{2}$ حيث يمثل $(1-\alpha)$ درجة الثقة المطلوبة ويمثل الاختبار الخاص بمعنوية المعلمة β_1 أهمية خاصة حيث تحدد هذه المعلمة وجود أو عدم وجود اتجاه خطي في الظاهرة، ويستخدم الإحصاء t المعرف بالصيغة التالية للحكم على معنوية هذه المعلمة

$$t = \hat{\beta}_1 / s\sqrt{c_{22}}$$

والذي يتبع توزيع t بدرجات حرية $(n - 2)$ بافتراض صحة الفرض العدمي $\beta_1 = 0$، ومن ثم نرفض الفرض العدمي إذا كان $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}$ وفي هذه الحالة نقر بوجود اتجاه خطي في الظاهرة. ومن ناحية أخرى إذا لم يتم رفض الفرض العدمي فإن هذا يعني عدم وجود اتجاه خطي في الظاهرة ويتم توفيق النموذج الآتي بدلاً من النموذج الخطي

$$y_t = \beta_0 + \varepsilon_t \qquad (1.8.6)$$

ويمكن في هذه الحالة إثبات أن (انظر تمرين18)

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 = \quad \bar{y}$$

مثال (5):

فيما يلي بيانات عن عدد المواليد (بالآلاف) في إحدى الدول في عـــدد مـــن السنوات

السنة	1995	1996	1997	1998	1999	2000
عدد المواليد	15	20	35	30	35	40

1. أوجد تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية
2. أوجد القيم الاتجاهية والأخطاء المقدرة
3. اختبر معنوية العلاقة بين الظاهرة والزمن
4. تنبأ بقيمة الاتجاه العام سنة 2001
5. كون فترة ثقة مناسبة لقيمة الاتجاه الحقيقي سنة 2001

الحـــل:

$$(X \; X) = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{bmatrix}$$

$$(X \; X)^{-1} = \frac{1}{105} \begin{bmatrix} 91 & -21 \\ -21 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 175 \\ \\ 695 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{105} \begin{bmatrix} 1330 \\ \\ 495 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.67 \\ \\ 4.71 \end{bmatrix}$$

1. تقدير معادلة الاتجاه

$$\hat{y}_t = 12.67 + 4.71t$$

2. بالتعويض المتتالي عن قيم $t = 1,2,\ldots,6$ نحصل على القيم الاتجاهية

$$\hat{y}_1 = 12.67 + 4.71 \ (1) = 17.38$$

$$\hat{y}_2 = 22.09 \ ; \quad \hat{y}_3 = 26.8 \ ; \quad \hat{y}_4 = 31.51 \ ; \quad \hat{y}_5 = 36.22 \ ; \quad \hat{y}_6 = 40.93$$

ومن ثم فإن الأخطاء المقدرة

$$e_t = y_t - \hat{y}_t \quad ; \quad t = 1,2,\ldots,6$$

$$e_1 = -2.38 \quad ; \quad e_2 = -2.09 \quad ; \ e_3 = 8.2$$

$$e_4 = -1.51 \quad ; \quad e_5 = -1.22 \quad ; \ e_6 = -0.93$$

.3

$$SSE = \sum_{1}^{6} e_t^2 = 81.906$$

$$s^2 = 81.906 / 4 = 20.4765 \quad ; \qquad s = 4.525$$

$$t = 4.71/(4.525)\sqrt{6/105} = 4.324$$

عند $\alpha = 0.05$

$$t_{\alpha/2,4} = t_{0.025,4} = 2.776$$

القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية ولذلك نرفض الفرض العدمي $\beta_1 = 0$ ونقر بوجود علاقة خطية معنوية بين الظاهرة والزمن بمستوى معنوية 5%

4. نعوض في المعادلة المقدرة عن $t = 7$

$$\hat{y}_7 = 12.67 + 4.71(7) = 45.64$$

$$x_o' = [\,1 \quad 7\,]$$

$$x_o'(X'X)^{-1} = \frac{1}{105}[-56 \qquad 21]$$

$$x_o'(X'X)^{-1}x_0 = 0.87$$

.5

ومن ثم فإن الخطأ المعياري للمقدر $\hat{y}_7$ هو

$$SE(\hat{y}_0) = 4.525 \quad [1 + 0.87]^{\frac{1}{2}} = 6.19$$

ومن ثم فإن 95% فترة ثقة للاتجاه الحقيقي هي

$$45.64 \pm (2.776)\ (6.19) = (28.46\ ,\ 62.82)$$

الاتجاه من الدرجة الثانية Quadratic Trend

في بعض التطبيقات قد لا يكون الخط المستقيم ملائمًا لتمثيل الاتجاه العام والأفضل توفيق منحنى من الدرجة الثانية لتمثيله (أنظر شكل(5)). وفي مثل هذه الحالات يمكن كتابة النموذج العام للظاهرة على الصورة

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t \tag{1.8.7}$$

ويمكن كتابة هذا النموذج على الصورة العامة

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

حيث

$$Y = [y_1 \quad y_2 \ldots y_n]' \qquad ,$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 \end{bmatrix}_{n\times 3} \qquad ,$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n]'$$

وفي هذه الحالة نجد أن

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum_{1}^{n} t & \sum_{1}^{n} t^2 \\ \sum_{1}^{n} t & \sum_{1}^{n} t^2 & \sum_{1}^{n} t^3 \\ \sum_{1}^{n} t^2 & \sum t^3 & \sum_{1}^{n} t^4 \end{bmatrix} ,$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{1}^{n} y \\ \sum_{1}^{n} t\,y \\ \sum_{1}^{n} t^2 y \end{bmatrix}$$

ومن ثم يمكن تطبيق القانون العام لإيجاد تقدير المربعات الصغرى $\hat{\beta}$، أي أن

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

مثال (6):

فيما يلي بيانات عن قيمة المبيعات (بآلاف الدولارات) من إحدى السلع التي ينتجها أحد المصانع في السنوات الموضحة:

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
قيمة المبيعات	12	8	6	5	6	8	7	10

1. قدر معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها من الدرجة الثانية.
2. أوجد القيم الاتجاهية والأخطاء المقدرة.
3. أوجد فترة ثقة مناسبة لقيمة الاتجاه سنة 1998.

الحـــل:

$$X^{'}X=\begin{bmatrix}8 & 35 & 204\\ 35 & 204 & 1296\\ 204 & 1296 & 8580\end{bmatrix}$$

$$(X^{'}X)^{-1}=\begin{bmatrix}1.95 & -0.91 & 0.09\\ -0.91 & 0.51 & -0.054\\ 0.09 & -0.054 & 0.006\end{bmatrix} ; \ X^{'}Y=\begin{bmatrix}62\\ 273\\ 1599\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(X^{'}X)^{-1}\ X^{'}Y=\begin{bmatrix}14.8\\ -4\\ 0.429\end{bmatrix}$$

1. تقدير معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t=14.8-\ 4t+0.429\,t^2$$

2. بالتعويض المتتالي عن قيم $t=1,2,\dots,8$ نحصل على القيم الاتجاهية الآتية.

$$\hat{y}_1=11.25\ ;\ \hat{y}_2=8.536\ ;\ \hat{y}_3=6.679\ ;\ \hat{y}_4=5.679\ ;$$
$$\hat{y}_5=5.536\ ;\ \hat{y}_6=6.25\ ;\ \hat{y}_7=7.821\ ;\ \hat{y}_8=10.25$$

ومن ثم الأخطاء المقدرة

$e_1 = 0.75 \quad ; \quad e_2 = -0.536 \quad ; \quad e_3 = -0.679 \quad ; \quad e_4 = -0.679 \quad ;$

$e_5 = 0.464 \quad ; \quad e_6 = 1.75 \quad ; \quad e_7 = -0.821 \quad ; \quad e_8 = -0.25$

$$SSE = \sum_{t=1}^{6} e_t^2 = 5.79$$

$$s^2 = SSE / 5 = 1.157 \quad ; \quad s = 1.076$$

3. نعوض في المعادلة المقدرة عن $t = 9$

$$\hat{y} = 14.8 - 4\ (9) + 0.429\ (81) = 13.536$$

$$x_0 = [1 \quad 9 \quad 81]$$

$$x_0'(X'X)^{-1}x_0 = 2.094$$

$$SE\ (\hat{y}_0) = s\ [1 + x_0'(X'X)^{-1}x_0]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1.076)\ (3.094)^{\frac{1}{2}} = 1.89$$

$$t_{0.025,5} = 2.571$$

ومن ثم فإن 95% فترة ثقة للاتجاه الحقيقي هي

$$13.536 \pm 2.571\ (1.89) = (8.68\ ,\ 18.40)$$

الاتجاه الأسي Exponential Trend

تظهر العديد من السلاسل الزمنية الفعلية التي تنشأ في مجالات الاقتصاد والأعمال اتجاهاً عاماً أسيا مع الزمن على المدى الطويل، ويحدث هذا عندما يتغير متوسط السلسلة بمعدل ثابت، أنظر شكل (6) . وفي مثل هذه الحالات يمكن التعبير عن الاتجاه العام على الصورة

$$E(y_t) = ce^{rt}$$

حيث r و c ثابتان. وفي مثل هذه الحالات يمكن التعبير عن مشاهدات السلسلة باستخدام النموذج الأسي الآتي

$$y_t = ce^{rt}.e^{\varepsilon_t} \qquad (1.8.8)$$

حيث e^{ε_t} مركبة خطأ

ويمكن تحويل النموذج (1.8.8) إلى الصورة الخطية باستخدام تحويلة اللوغاريتمات، أي أن

$$\ln y_t = \ln c + rt + \varepsilon_t \qquad (1.8.9)$$

ومن ثم يمكن تطبيق القواعد والأحكام الخاصة بتحليل الانحدار الخطي البسيط على البيانات المحولة $\ln\ y_t$ للحصول على تقديرين للثابتين $\ln\ c$ و r وذلك بإجراء انحدار $\ln\ y_t$ على الزمن. بعد الحصول على تقدير $\ln\ c$ يمكن الحصول على تقدير الثابت c كالآتي

$$\hat{c} = e^{\hat{\ln c}}$$

وبناءً على ما تقدم يكون تقدير منحنى الاتجاه الأسي

$$\hat{y}_t = \hat{c}\ e^{\hat{r}t}$$

ومن ثم يمكن الحصول على القيم الاتجاهية بالتعويض في هذه الصورة بالقيم المتتالية للزمن $t = 1,2,\ldots,n$ ، كما يمكن الحصول أيضًا على تنبؤات النقطة لما سيكون عليه الاتجاه العام في المستقبل، فضلاً عن ذلك يمكن إيجاد تقديرات الأخطاء e_t وتباين الأخطاء بالطريقة العادية. أما بخصوص بناء فترة ثقة للاتجاه العام المستقبلي فيمكن تطبيق نفس القواعد والقوانين التي استخدمت في حالة

الاتجاه الخطي على البيانات المحولة $\ln\, y_t$ للحصول على حـدي الثقـة للوغـاريتم الاتجاه العام. إذا افترضنا أن حدي الثقة هما a_2 ، a_1 فإن فترة الثقة للاتجاه الحقيقي تكون $(e^{a_2} \quad , \quad e^{a_1})$. بالإضافة إلى ذلك يمكن تخليص الظاهرة من أثـر الاتجاه العام وذلك بقسمة المشاهدات الحقيقية y_t على القيم الاتجاهية المناظرة $\hat{y}_t$.

ويتميز تحليل الانحدار في قياسه للاتجاه العام بعدة مميزات أهمها ما يلي:

1- البساطة والوضوح وسهولة التطبيق والذي يعتمد على مفردات نظرية الإحـصاء من خلال مبدأ المربعات الصغرى في إيجاد التقديرات الضرورية لتوفيق منحنـى الاتجاه العام.

2- لايعتمد على التقديرات والأحكام الشخصية بنفس درجة الأساليب الأخرى وذلـك إذا توافرت مقومات استخدام هذا الأسلوب من فروض نظرية حيث يعتمد تحليـل الانحدار على التعبير عن الاتجاه العام في قالب رياضي محدد وواضح.

3- القدرة على تقدير الاتجاه العام عند نقاط زمنية مستقبلية أو ماضية وبناء فتـرات الثقة المناسبة ذات الصلة.

ورغم هذه المميزات إلا أن تحليل الانحدار له عدة عيوب عند توظيفه لتقدير الاتجـاه العام أهمها ما يلي:

1- يعتمد على بعض الفروض النظرية – وأهمها عدم وجود ارتباط بين المشاهدات – من النادر أن تتوافر في حالة السلاسل الزمنية، ولذلك فإن تقديرات المربعـات الصغرى والتنبؤات المختلفة قد تكون غير دقيقة. ولذلك ينـصح باسـتخدام هـذه الطريقة إذا كان تشتت البيانات حول الاتجاه العام عشوائيا تمامًا.

2- يفترض أن معاملات الانحدار ثابتة لا تتغير بتغير الزمن أي أن الاتجـــاه العـــام للظاهرة غير عشوائي في حين أن الكثير من السلاسل الزمنية تظهر اتجاهًا عامًا عشوائيًا.

3- عدم إمكانية تحديث القيم الاتجاهية عند توافر مشاهدات جديدة، فعند توافر مشاهدة جديدة يجب إعادة حساب التقديرات ومن ثم القيم الاتجاهية.

1.8.2 المتوسطات المتحركة Moving Averages

من الأساليب البسيطة لتقدير الاتجاه العام تمهيد البيانات المشاهدة بتخليـــصها من التغيرات قصيرة الآجل التي تحدث بسبب التغيـــرات الفجائيـــة غيـــر المنتظمـــة (والتغيرات الموسمية إن وجدت) عن طريق ما يعرف بالمتوسطات المتحركة والتـــي تختلف عن المتوسطات المتحركة البسيطة التي سبق تقديمها في معرض الحديث عـــن طرق التنبؤ. ولحساب المتوسطات المتحركة لابد أولاً من تحديـــد عـــدد معـــين مـــن الوحدات الزمنية k – يطلق عليه طول الدورة – يكون أساسًا لحساب هذه المتوسطات وتمهيد البيانات بالتخلص من الذبذبات والتعرجات التي تعتريه. بعد ذلك يتم تعريـــف وحساب المتوسطات المتحركة واللذان يختلفان بـــاختلاف كـــون العـــدد k فـــردي أو زوجي. فإذا كان k عدداً فردياً يعرف المتوسط المتحرك بأنه

$$\hat{y}_t = \frac{1}{k} \left[y_{t-\frac{(k-1)}{2}} + \ldots + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \ldots + y_{t+\frac{(k-1)}{2}} \right] ;$$

$$t = \frac{(k+1)}{2}, \ \frac{(k+3)}{2} + \cdots, n - \frac{(k-1)}{2}$$

ويلاحظ على هذه الصورة تعذر حساب المتوســطات المتحركـــة لأول $\frac{(k-1)}{2}$ مشاهدة ولأخر $\frac{(k-1)}{2}$ مشاهدة وبذلك نحصل على عدد $[n-(k-1)]$ متوسط متحـــرك فقـــط لسلـــسلة طولهـــا n تمثـــل القـــيم الاتجاهيـــة المنـــاظرة للقـــيم

$y_t \; ; \quad t = \frac{(k+1)}{2}, \dots, n - \frac{(k-1)}{2}$. وبناءً على هذا التعريف يمكن تلخيص خطوات حساب المتوسطات المتحركة إذا كان العدد k فردياً كما يلي:

1. حساب متوسط أول k مشاهدة في البيانات وهي $y_1, y_2, \dots, y_k$
2. إحلال القيمة التالية y_{k+1} مكان القيمة الأولى في مجموعة البيانات التي حسبت لها المتوسط في الخطوة السابقة ثم حساب المتوسط الحسابي لمجموعة البيانات الجديدة $y_2, y_3, \dots, y_k, y_{k+1}$
3. إحلال القيمة التالية y_{k+2} مكان القيمة y_2 في مجموعة البيانات التي حسب لها المتوسط الحسابي في الخطوة السابقة وحساب المتوسط الحسابي لمجموعة المشاهدات الجديدة $y_3, y_4, \dots, y_{k+1}, y_{k+2}$. وهكذا يمكن حساب باقي المتوسطات المتحركة.
4. يوضع كل متوسط متحرك $\hat{y}_t$ أمام منتصف الفترة الزمنية التي حسب لها المتوسط الحسابي، فيوضع المتوسط المتحرك الأول $\hat{y}_{\frac{k+1}{2}}$ أمام القيمة $y_{\frac{k+1}{2}}$ ، ويوضع المتوسط $\hat{y}_{\frac{k+3}{2}}$ أمام القيمة $y_{\frac{k+3}{2}}$، ... وهكذا. وتمثل هذه المتوسطات تقديرات الاتجاه العام للقيم المناظرة.

وعلى سبيل المثال إذا كان k= 3 فإن المتوسطات المتحركة تكون على الترتيب

$$\hat{y}_2 = \frac{1}{3}[y_1 + y_2 + y_3]$$

$$\hat{y}_3 = \frac{1}{3}[y_2 + y_3 + y_4]$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\hat{y}_{n-1} = \frac{1}{3}[y_{n-2} + y_{n-1} + y_n]$$

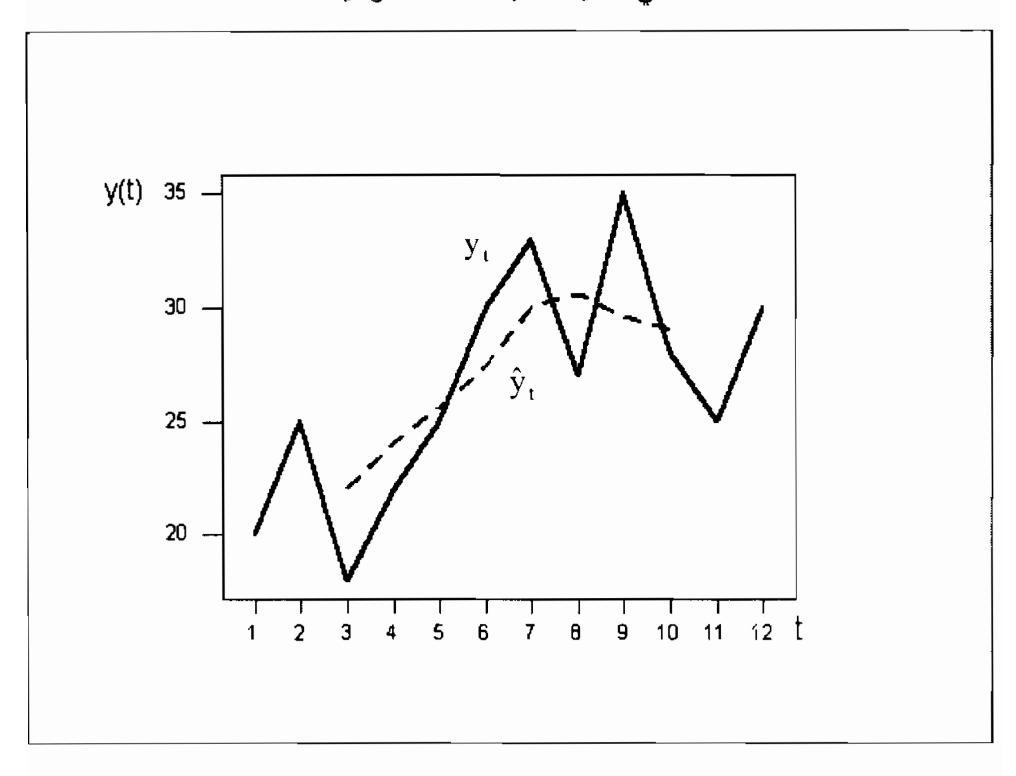
وتكون المتوسطات $\hat{y}_2, \hat{y}_3, \ldots, \hat{y}_{n-1}$ تقديرات الاتجاه العـــام للقـــيم $y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ على الترتيب

مثال (7): أوجد المتوسطات المتحركة لبيانات السلسلة الزمنية الآتيـــة بـــافتراض أن طول الدورة يساوي خمس وحدات زمنية ثم ارسم معادلة الاتجاه العام المقـــدرة فـــي مقابل القيم الحقيقية.

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	20	25	18	22	25	30	33	27	35	28	25	30

الحـــل:

t	y_t	المتوسطات المتحركة $\hat{y}_t$
1	20	
2	25	
3	18	(20 + 25 + 18 + 22 + 25) / 5 = 22
4	22	(25 + 18 + 22 + 25 + 30) / 5 = 24
5	25	(18 + 22 + 25 + 30 + 33) / 5 = 25.6
6	30	(22 + 25 + 30 + 33 + 27) / 5 = 27.4
7	33	(25 + 30 + 33 + 27 + 35) / 5 = 30
8	27	(30 + 33 + 27 + 35 + 28) / 5 = 30.6
9	35	(33 + 27 + 35 + 28 + 25) / 5 = 29.6
10	28	(27 + 35 + 28 + 25 + 30) / 5 = 29
11	25	
12	30	



شكل (10): البيانات الأصلية والمتوسطات المتحركة لبيانات المثال(7)

من السهل على القارئ أن يلاحظ أن منحنى المتوسطات المتحركة أو تقديرات الاتجاه العام في شكل (10) أكثر تمهيدًا ونعومة من منحنى السلسلة الأصلي والسبب في ذلك أنه بأخذ المتوسطات المتحركة تميل التغيرات غير النمطية أن تتلاشى لأنها تغيرات لا تستمر طويلاً وأحيانًا تؤثر على الظاهرة بالزيادة وأحيانًا أخرى بالنقصان، فضلاً عن ذلك يمكن للقارئ أن يلاحظ أن منحنى الاتجاه العام المقدر قريب من الدرجة الثانية. وتجدر الإشارة إلى أن منحنى الاتجاه العام المقدر يكون أكثر تمهيدًا ونعومة بزيادة طول الدورة k وذلك إذا كانت التأرجحات حول منحنى الاتجاه العام عشوائية (غير نمطية) بحته أي إذا كانت السلسلة خالية من التغيرات الموسمية.

ومن ناحية أخرى إذا كان طول الدورة زوجيًا فإن المتوسط المتحرك لا يمكن وضعه أمام إحدى القيم المشاهدة وإنما يوضع بين قيمتين معينتين، ومن ثم كان لابد من مركزة المتوسطات المتحركة حتى يتسنى وضعها في مقابل القيم الحقيقية المشاهدة، ولذلك يعرف المتوسط المتحرك (الممركز) إذا كان طول الدورة k زوجي على الصورة

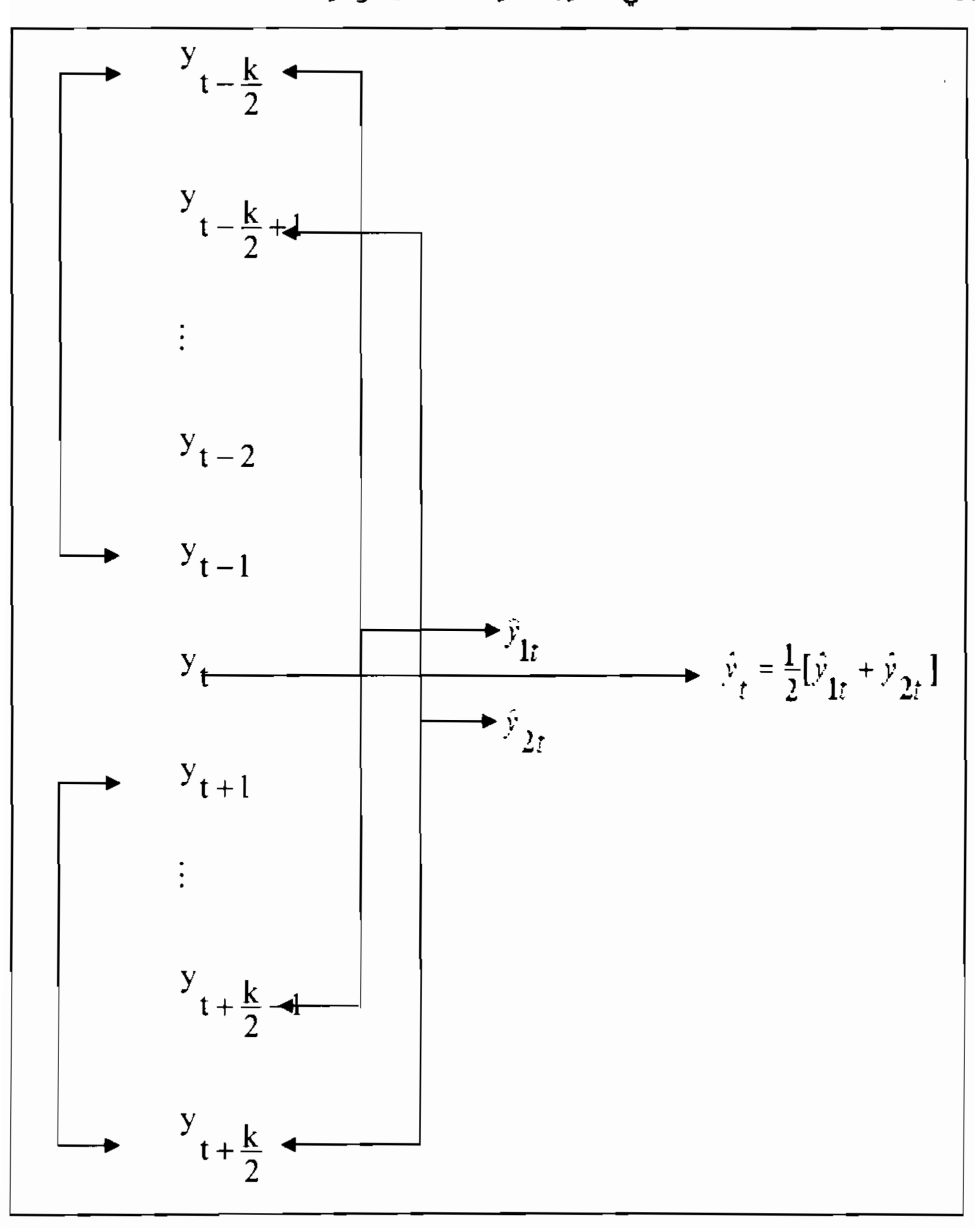
$$\hat{y}_t = \frac{1}{2}\,[\hat{y}_{1t} + \hat{y}_{2t}]\ ;\ t = \frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+2, \cdots, n-\frac{k}{2} \qquad (1.8.10)$$

حيث

$$\hat{y}_{1t} = \frac{1}{k}[y_{t-\frac{k}{2}} + y_{t-\frac{k}{2}+1} + \cdots + y_t + y_{t+1} + \cdots + y_{t+\frac{k}{2}-1}]\ ,$$

$$y_{2t} = \frac{1}{k}[y_{t-\frac{k}{2}+1} + \cdots + y_t + y_{t+1} + \cdots + y_{t+\frac{k}{2}-1} + y_{t+\frac{k}{2}}]$$

ويلاحظ على الصورة (1.8.10) تعذر حساب المتوسطات المتحركة لأول $\left(\frac{k}{2}\right)$ مشاهدة ولآخر $\left(\frac{k}{2}\right)$ مشاهدة وبذلك نحصل على عدد $(n-k)$ متوسط متحرك فقط لسلسلة طولها n تمثل القيم الاتجاهية المناظرة للقيم $y_t\ ;\ t = \frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+3, \cdots, n-k$ ·
وفي الواقع يمكن للقارئ تصور صياغة التعريف العام (1.8.10) وكيفية حسابه إذا تم رصد قيمة الظاهرة y_t عند نقطة زمنية معينةt وعدد $\frac{k}{2}$ من القيم التي تسبقها مباشرة وعدد $\frac{k}{2}$ من القيم التي تليها مباشرة في الشكل التخطيطي(11).



شكل (11): رسم تخطيطي يوضح كيفية حساب المتوسط المتحرك إذا كان طول الدورة زوجي

من الشكل التخطيطي(11) يتضح أنه لكي يتم حساب المتوسط المتحرك المواجه للقيمة y_t نجرى الخطوات الآتية:

1. نحسب المتوسط الحسابي للمشاهدات $y_{t-\frac{k}{2}}, y_{t-\frac{k}{2}+1}, \ldots, y_{t+\frac{k}{2}-1}$ لنحصل على $\hat{y}_{1t}$
2. نحسب المتوسط الحسابي لنفس المشاهدات السابقة بعد إحلال القيمة التالية $y_{t+\frac{k}{2}}$ مكان القيمة $y_{t-\frac{k}{2}}$ لنحصل على $\hat{y}_{2t}$
3. نحصل على المتوسط المتحرك المناظر للقيمة y_t بأخذ المتوسط الحسابي للمتوسطين $\hat{y}_{2t}$ ، $\hat{y}_{1t}$

وفي الواقع أن حساب المتوسطات المتحركة عملياً يبدو أسهل من الصورة النظرية كما سنرى في المثال الآتي

مثال (8):

تمثل البيانات الآتية القروض ربع السنوية بآلاف الدولارات التي مولها أحد البنوك في ثلاث سنوات

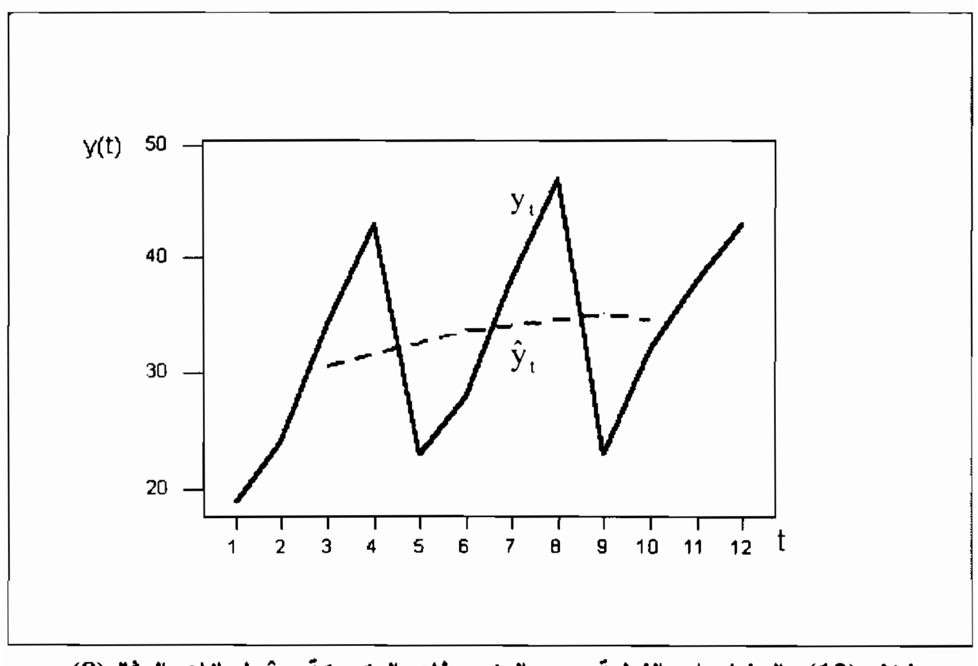
الموسم (الفصل) / السنة	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
2000	19	24	34	43
2001	23	28	38	47
2002	23	32	38	43

احسب المتوسطات المتحركة لهذه البيانات وارسمها في مقابل القيم الأصلية.

الحـــــل:

نأخذ طول الدورة $k = 4$ وذلك للتخلص من التغيرات الموسمية والتغيرات غير النمطية. ويمكن تصور حسابات المتوسطات المتحركة في الجدول الآتي:

المتوسطات المتمركزة $\hat{y}_t$	المتوسطات المتحركة	y_t	الزمن	السنوات
		19	1	2000
		24	2	
(30+31)/2=30.5	(19 + 24 + 34 + 43) / 4 = 30	34	3	
(31+32)/2=31.5	(24 + 34 + 43 + 23)/ 4 = 31	43	4	
(32+33)/2=32.5	(34 + 43 + 23 + 28) / 4 = 32	23	5	2001
(33+34)/2=33.5	(43 + 23 + 28 + 38) / 4 = 33	28	6	
(34+34)/2=34	(23 + 28 + 38 + 47) / 4 = 34	38	7	
(34+35)/2=34.5	(28 + 38 + 47 + 23) / 4 = 34	47	8	
(35+35)/2=35	(38 + 47 + 23 + 32) / 4 = 35	23	9	2002
(35+34)/2=34.5	(47 + 23 + 32 + 38) / 4 = 35	32	10	
	(23 + 32 + 38 + 43) / 4 = 34	38	11	
		43	12	



شكل (12): المشاهدات الفعلية y_t والمتوسطات المتحركة $\hat{y}_t$ لبيانات المثال(8)

وتجدر الإشارة إلى تسجيل ملاحظتين هامتين عن المثال (8). الملاحظة الأولى أن اختيار العدد 4 لكي يكون أساساً لحساب المتوسطات المتحركة هو اختيار أملته علينا طبيعة البيانات والتي تتميز بوجود نمط موسمي يتكرر كل 4 فترات زمنية (مواسم). بهذا الاختيار يكون قد تخلصنا من نوعين من التغيرات قصيرة الأجل. النوع الأول وهو التغيرات غير النمطية والتي لا تستمر طويلاً وتميل أن تلاشي بعضها البعض عند أخذ المتوسطات المتحركة. النوع الثاني هو التغيرات الموسمية وذلك لأن كل متوسط متحرك يأخذ في اعتباره كل المواسم (الفصول) بنسب متساوية. الملاحظة الثانية أن منحنى الاتجاه العام المقدر $\hat{y}_t$ لا يمثل خطًا مستقيمًا بالضبط وهو خالي من التعرجات والذبذبات والتغيرات الموسمية التي تعتري البيانات الأصلية.

وتعتمد فعالية طريقة المتوسطات المتحركة في التخلص من التأرجحات التي تعتري البيانات على اختيار طول الدورة k بشكل جيد. ويعتمد اختيار طول الدورة بصفة عامة على خبرة الباحث وتقديره الشخصي وفحص الموسمية. وقد نختار في بعض الأحيان عدة قيم مختلفة لطول الدورة k ونحسب المتوسطات المتحركة المناظرة لكل قيمة ثم نحسب أحد المعايير التي سبق أن درسناها لقياس حجم الأخطاء – وليكن متوسط مجموع مربعات الأخطاء – ونختار قيمة k التي تدني هذا المعيار. أما إذا كان بالسلسة نمط موسمي يتكرر كل عدد من الفترات الزمنية فإن هذا العدد (أو مضاعفاته) عادة ما يؤخذ كأساس لطول الدورة في حساب المتوسطات المتحركة وذلك للتخلص من التغيرات الموسمية.

وتتميز طريقة المتوسطات المتحركة بعدة مميزات أهمها مايلي.

1- البساطة وسهولة إجراء العمليات الحسابية.

2- لا تفترض شكل رياضي معين لمنحنى الاتجاه العام.

3- لا تطلب إعادة الحسابات إذا توافرت مشاهدات جديدة.

ومن ناحية أخرى فإن طريقة المتوسطات المتحركة لها عدة عيوب أهمها.

1- لا يمكن معرفة القيم الاتجاهية لكل القيم المشاهدة.

2- لا يمكن معرفة الشكل الرياضي لمنحنى الاتجاه العام المقدر بالضبط ومن ثم عدم إمكانية استخدامه بشكل مباشر في التنبؤ بالقيم الاتجاهية.

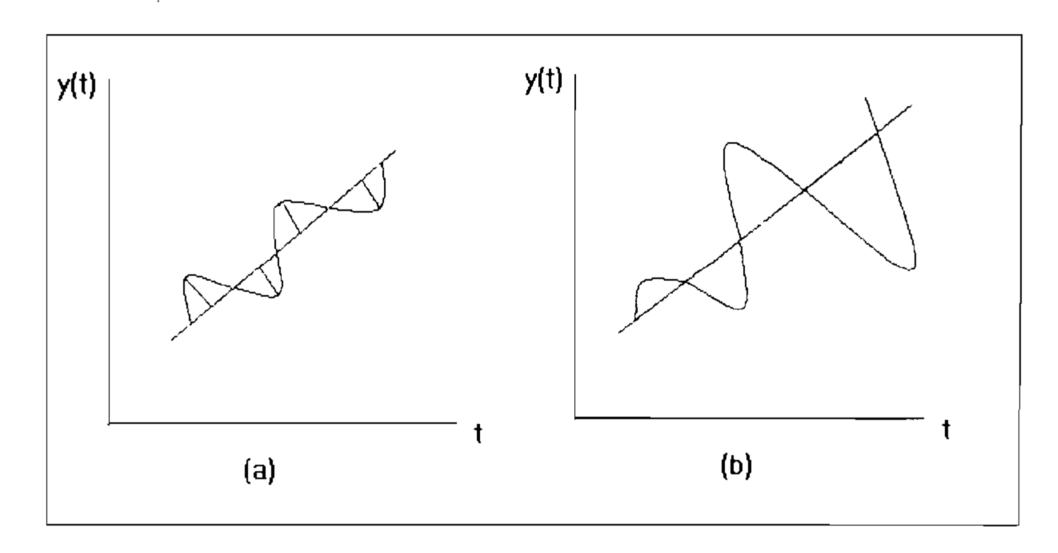
3- تتأثر المتوسطات الحسابية بالقيم الشاذة والمتطرفة مما يجعل منحنى الاتجاه العام مجذوبًا لهذه القيم.

4- اختيار طول الدورة k لكي يكون أساسًا لحساب المتوسطات المتحركة يختلف من باحث إلى آخر لأنه يعتمد على خبرته العملية والنظرية وحكمه الشخصي في حالات كثيرة.

1.9 طريقة التجزيء الضربي

وجدنا في المثال (8) أن المتوسطات المتحركة تعمل على إزالة الأثر الموسمي من البيانات إذا تم حسابها باستخدام طول الدورة الحقيقي في البيانات أي عدد المواسم التي تتكون منها الوحدة الزمنية الرئيسية (عادة السنة) وهو 4. وفي الواقع أنه يمكن إزالة الأثر الموسمي من السلاسل الشهرية إذا حسبت المتوسطات المتحركة باستخدام طول الدورة الحقيقي12. وتعمل المتوسطات المتحركة أيضًا على التخلص من أثر التغيرات غير المنتظمة ومن ثم لا يتبقى لدينا من الظاهرة إلا عاملي الاتجاه العام والدوري فقط. وتسمي السلسلة الزمنية بعد إزالة أثر الموسم بالسلسلة مخلصة من أثر الموسم deseasonalized series أو السلسلة المنقحة (المعدلة) adjusted series وهي توضح لنا الكيفية التي يمكن أن يكون عليها شكل البيانات لو لم تتعرض السلسلة لتغيرات موسمية. والآن كيف يمكن تقدير تأثير مركبة الموسم؟ في الواقع أن تقدير هذه المركبة يتوقف على الكيفية التي يتم بها نمذجة

مركبات السلسلة الزمنية الأربع، ويمكن القول أن الأساليب التقليدية قد عرفت نوعين من النماذج هما النموذج الجمعي additive model والنموذج الضربي multiplicative model. ويفترض النموذج الجمعي أن قيمة الظاهرة عند الزمن t هي حاصل جمع المركبات الأربع التي تتكون منها السلسلة عند نفس الزمن، ويكون هذا النموذج مناسبًا إذا كانت التأرجحات الموسمية seasonal swings مستقلة عن مستوى الظاهرة مقاسًا بالاتجاه العام (انظر شكل (13.a)). ومن النادر أن نجد سلاسل زمنية فعلية تتبع هذا النموذج ولذلك فلن نتعرض لهذا النموذج بالدراسة. ويفترض النموذج الضربي أن قيمة الظاهرة عند الزمن t هي حاصل ضرب المركبات الأربع التي تتكون منها السلسلة عند نفس الزمن، ويكون هذا النموذج مناسبًا إذا كانت التأرجحات الموسمية تتناسب مع مستوى السلسلة مقاسًا بالاتجاه العام (انظر شكل(13.b)) .



شكل (13): تغيرات موسمية جمعية وضربية

والنموذج الضربي أكثر استخدامًا وشيوعًا في التطبيقات العملية ولذلك ستقتصر دراستنا في تقدير التأثيرات الموسمية والتنبؤ بالسلاسل الموسمية على هذا النموذج. ويأخذ هذا النموذج الشكل العام الآتي:

$$y_t = T_t \ . \ S_t \ . \ C_t \ . \ I_t \qquad (1.9.1)$$

حيث تشير y_t إلى قيمة الظاهرة عند الزمن t، ويشير T_t إلى أثر الاتجاه العام عند الزمن t، ويشير S_t إلى أثر الموسم عند الزمن t، ويشير C_t إلى أثر العامل الدوري عند الزمنt، بينما يشير I_t إلى أثر العوامل غير المنتظمة عند الزمن t. وسنشير إلى تقديرات هذه المركبات المختلفة من البيانات المتاحة بالرموز الصغيرة $t_t \ , s_t \ , c_t \ , i_t$ على الترتيب.

1.9.1 تقدير المعاملات الموسمية

تعرف تأثيرات المواسم المختلفة S_t بالمعاملات الموسمية seasonal factors. ولتقدير هذه المعاملات تقترح طريقة التجزيء الضربي إجراء الخطوات التالية:

1. الحصول على المتوسطات المتحركة باستخدام الطول الحقيقي للدورة الموسمية في البيانات، فإذا كانت البيانات ربع سنوية نعتبر طول الدورة 4 وإذا كانت البيانات شهرية نستخدم طول الدورة 12،.... وهكذا. بحساب المتوسطات المتحركة نكون قد تخلصنا من مركبتي الموسم وغير المنتظمة، وبالتالي فإن هذه المتوسطات تمثل توليفة من عاملي الاتجاه العام والدوري، أي أن

$$(MA)_t = (t_t . c_t) \qquad (1.9.2)$$

حيث يشير الرمز $(MA)_t$ إلى المتوسط المتحرك عند الزمن t.

2. بقسمة قيمة الظاهرة الأصلية y_t والتي تتكون من حاصل ضرب المركبات الأربع على المتوسطات المتحركة نحصل على تقديري المركبتين الأخريتين الموسمية وغير المنتظمة، أي أن

$$(s_t.i_t) = \frac{y_t}{(MA)_t} \tag{1.9.3}$$

3. تحذف أثر العوامل غير المنتظمة من التوليفة $(s_t.i_t)$ بإيجاد المتوسط الحسابي لها وبالتالي نحصل على متوسطات المعاملات الموسمية $\bar{s}_t$

4. عادة ما يتم تعديل التقديرات بحيث يساوي مجموعها عدد المواسم (طول الدورة) ومن ثم يمكن مقارنة كل معامل موسمي بالواحد الصحيح، ويعرف معامل التصحيح correction factor على الصورة

$$CF = \frac{k}{\sum_{t=1}^{k} \bar{s}_t}$$

5. تحسب تقديرات المعاملات الموسمية كما يلي

$$s_t = (CF)(\bar{s}_t) \ ; \ t = 1, 2, \cdots, k \tag{1.9.4}$$

مثال (9):

احسب تقديرات المعاملات الموسمية لبيانات المثال (8)

الحـــــل:

توضع المتوسطات المتحركة (المتمركزة) التي سبق حسابها بجانب المشاهدات y_t في جدول منفصل ثم نجري الحسابات الموضحة في الجدول الآتي:

السنوات	t	y_t	$(MA)_t = t_t.c_t$	$s_t.i_t = y_t/(MA)_t$	s_t	$d_t = y_t/s_t$
2000	1	19			0.68	27.94
	2	24			0.87	27.59
	3	34	30.5	1.11	1.1	30.91
	4	43	31.5	1.37	1.35	31.85
2001	5	23	32.5	0.71	0.68	33.82
	6	28	33.5	0.84	0.87	32.18
	7	38	34	1.12	1.1	34.55
	8	47	34.5	1.36	1.35	34.81
2002	9	23	35	0.66	0.68	33.82
	10	32	34.5	0.93	0.87	36.78
	11	38			1.1	34.55
	12	43			1.35	31.85

ويمكن تلخيص بيانات العمود $(s_t.i_t)$ في جدول كالتالي

	الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
	0.71 0.66	0.84 0.93	1.11 1.12	1.37 1.36
المتوسط الحسابي $\bar{s}_t$	0.685	0.885	1.115	1.365

وبالتالي فإن

$$CF = \frac{4}{\sum \bar{s}_t} = \frac{4}{4.05} = 0.9877$$

ومن ثم فإن تقديرات المعاملات الموسمية تكون:-

$$s_1 = (0.9877)\ (0.685) = 0.68$$

$$s_2 = (0.9877)\ (0.885) = 0.87$$

$$s_3 = (0.9877)\ (1.115) = 1.1$$

$$s_4 = (0.9877)\ (1.365) = 1.35$$

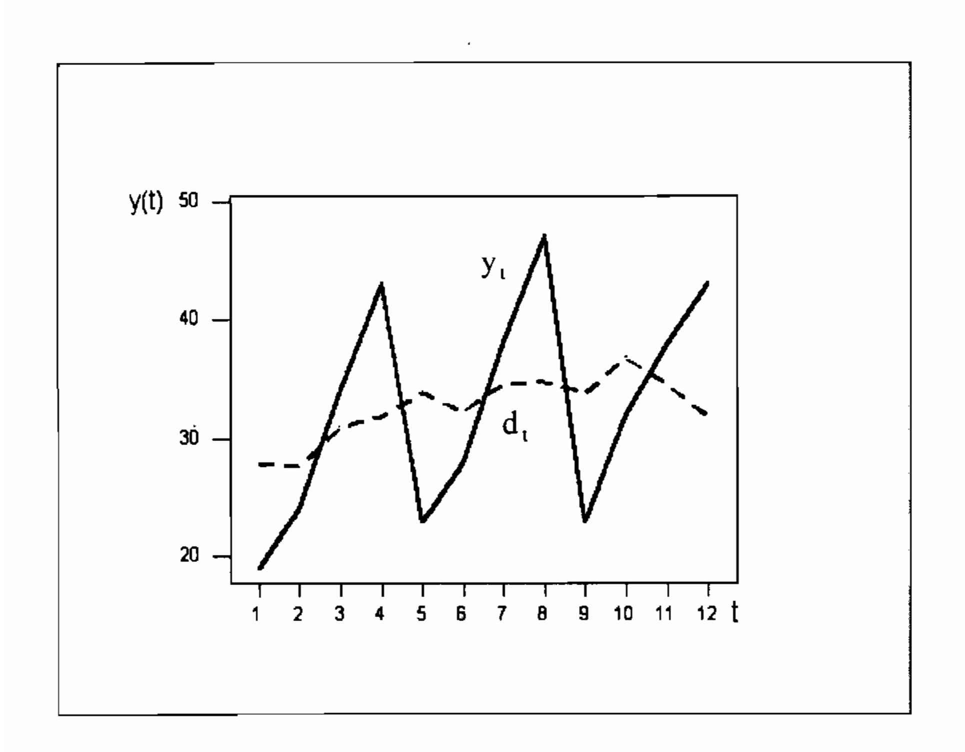
لاحظ أن مجموع تقديرات المعاملات الموسمية يساوي الآن 4

إذا كان المعامل الموسمي المناظر لموسم معين يساوي الواحد الصحيح فإن هذا يعني أن هذا الموسم ليس له أثر موسمي على الظاهرة، وإذا كان المعامل الموسمي أكبر من الواحد الصحيح فإن هذا يعني أن هذا الموسم يؤثر على الظاهرة بالزيادة، أما إذا كان المعامل الموسمي أصغر من الواحد الصحيح فهذا يعني أن هذا الموسم يؤثر على الظاهرة بالنقصان. ففي المثال الذي بين أيدينا يمكن القول بأن الموسم الأول (الربع الأول) ينقص من مستوى السلسلة بنسبة 32% تقريبًا، فإذا كانت قيمة الاتجاه العام في هذا الموسم 100 فإن المعامل الموسمي s_1 يجذب هذه القيمة إلى أسفل لتصبح 68 فقط. كما يمكن القول بأن الموسم الرابع يزيد من مستوى السلسلة بنسبة 35% تقريبًا، فإذا كانت قيمة الاتجاه العام في هذا الموسم 100 فإن المعامل الموسمي s_4 يزيد من هذه القيمة لتصبح 135.

ولإيجاد قيم الظاهرة مخلصة من أثر الموسم جرت العادة على وضع المعاملات الموسمية في عمود معين بالجدول (s_t) ثم قسمة العمود y_t على العدد s_t لنحصل على القيم المعدلة للظاهرة والتي أشير إليها بالرمز d_t في الجدول، أي أن

$$d_t = y_t / s_t = (t_t)(c_t)(i_t)$$

والشكل (14) يوضح قيم الظاهرة الأصلية y_t وقيم الظاهرة بعد تخليصها من أثر الموسم d_t



شكل (14): السلسلة الأصلية والسلسلة المعدلة لبيانات المثال(8)

1.9.2 التنبؤ بالسلاسل الزمنية الموسمية

يفضل الكثير من الدارسين دراسة السلسلة المعدلة d_t لمعرفة الكيفية التي يتطور بها الاتجاه العام للسلسلة بدلاً من دراسة السلسلة الأصلية y_t وذلك لأن السلسلة المعدلة d_t تكون خالية من التأرجحات الموسمية ومن ثم يكون نمط الاتجاه

العام أوضح. ومن رسم السلسلة d_t في المثال السابق يلاحظ أن معادلة الدرجة الثانية تبدو مناسبة لشرح الاتجاه العام، ومن ثم فإن النموذج الآتي يمكن أن يشرح الكيفية التي تتطور بها قيم السلسلة المعدلة d_t

$$d_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

وبالتالي يمكن تقدير معادلة الاتجاه العام بإجراء انحدار d_t على المتغيرين $t\ ,\ t^2$ وتكون تقديرات المربعات الصغرى

$$\hat{\beta} = (X^{'}X)^{-1}X^{'}d$$

حيث

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 12 & 144 \end{bmatrix} ;\ d^{'} = [27.94 \quad 27.29 \quad \cdots \quad 31.85]$$

وبإجراء الحسابات الضرورية يمكن إثبات أن معادلة الاتجاه العام المقدرة يمكن أن تكتب على الصورة

$$t_t = \hat{d}_t = 24.8 + 2.3t - 0.133t^2 \ ; \qquad t = 1,2,\cdots$$

كما يمكن إثبات أن β_2 تختلف معنويًا عن الصفر، ومن ثم تكون معادلة الدرجة الثانية ملاءمة لدراسة الاتجاه العام. ويمكن استخدام المعادلة المقدرة لإيجاد قيم الاتجاه العام للقيم الأصلية، فضلاً عن ذلك يمكن التنبؤ بقيمة الاتجاه العام عند فترة زمنية لاحقة.

والآن يمكن استخدام تقديرات المعاملات الموسمية s_t وتقديرات الاتجاه العام للحصول على تقديرات للمعاملات الدورية والعوامل غير المنتظمة، ولكن هذه التقديرات ليست دقيقة وبالتالي فعادة ما يعتمد فقط على تقديرات الاتجاه العام

والمعاملات الموسمية في التنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة الأصلية كما يلي

$$\hat{y}_t = (t_t)(s_t)$$

أي أنه للتنبؤ بقيمة الظاهرة عند فترة زمنية لاحقة يكفي أن نعرف تقدير الاتجاه العام عند هذه الفترة بالتعويض في معادلة الاتجاه العام المقدرة بقيمة t المناسبة ثم ضرب هذا التقدير في تقدير المعامل الموسمي المناسب لهذه الفترة. فإذا أردنا على سبيل المثال التنبؤ بقيمة القروض التي سيمولها البنك في الربع الأول من سنة 2003 أي عند الفترة الزمنية التالية نضع $t = 13$ في معادلة الاتجاه العام المقدرة فنحصل على

$$t_{13} = \hat{d}_{13} = 24.8 + 2.3(13) - 0.133\ (13^2) = 32.223$$

وهذه القيمة تمثل التنبؤ بقيمة الاتجاه العام في الربع الأول من سنة 2003. أيضًا المعامل الموسمي عند هذه الفترة هو

$$s_{13} = s_1$$

ومن ثم فإن تنبؤ النقطة المناسب للقروض هو

$$\hat{y}_{13} = (t_{13})(s_1) = (32.223)\ (0.68) = 21.91$$

وبالمثل فإن تنبؤ النقطة لقيمة القروض في الربع الثاني من سنة 2003 يكون

$$\hat{y}_{14} = (t_{14})\ (s_2) = [24.8 + 2.3(14) - 0.133(14)^2]\ \ [0.87]$$
$$= [30.932]\ [0.87] = 26.91$$

بالنسبة للتنبؤ بفترة الثقة يمكن القول بأنه لا يوجد فترة ثقة حقيقية للمشاهدات المستقبلية عند استخدام طريقة التجزئ الضربى، ولكن على أية حال يمكن تكوين فترة ثقة تقريبية فقط بالاعتماد على مخرجات توفيق معادلة الاتجاه العام كما يلي

$$\hat{y}_o \pm t_{\alpha/2,n-p} . s[1 + x_o^{'} (X^{'}X)^{-1} x_o]^{\frac{1}{2}}$$

حيث يرمز $\hat{y}_o$ إلى تنبؤ النقطة للمشاهدة التي يراد إنشاء فترة ثقة لها، ويرمز X_0 إلى المتجه العمودي الذي يضم قيم المتغيرات المستقلة (الزمن) المراد التنبؤ بفتـــرة ثقـــة للظاهرة عندها، ويرمز p إلى عدد المعالم الموجود في معادلة الاتجاه العـــام، بينمـــا الرمز s إلى تقدير σ ويحسب كما يلي

$$s = \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-p} \sum_{t=1}^{n} (d_t - \hat{d}_t)^2}$$

فعلى سبيل المثال إذا أردنا إنشاء فترة ثقة للقروض التي سيمولها البنك فـــي الربـــع الأول من سنة 2003 أي للقيمة y_{13} في المثال (8) فإن

$$s = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{t=1}^{12} (d_t - \hat{d}_t)^2} = 1.266 \ ; \ t_{0.025,9} = 2.262$$

$$x_o^{'} = [1 \quad 13 \quad 169] \ ;$$

$$[1 + x_o^{'} (X^{'}X)^{-1} x_o]^{\frac{1}{2}} = 1.446$$

ومن ثم فإن 95% فترة ثقة تكون

$$21.91 \pm (2.262) \ (1.266) \ (1.446)$$

$$= (17.77 \ , \ 26.05)$$

وتمتاز طريقة التجزيء الضربي في التنبؤ بالسلاسل الزمنية بالبساطة وسهولة الحسابات والتنفيذ فهي مجرد حساب متوسطات متحركة وإجراء انحدار تقليدي، كمـــا تمتاز هذه الطريقة بأنها تعطي نتائج معقولة في حالة السلاسل القصيرة. ومن ناحيـــة أخرى فإن لهذه الطريقة العديد من العيوب، أولها أنها تفترض وجود نموذج واحد لكل

الظواهر الهندسية والطبيعية والاقتصادية والاجتماعية والبيئية وغيرها ومن ثم فهي طريقة حسية لا يمكن تقييمها. العيب الثاني أنها تفترض أن الاتجاه العام محدد أي غير عشوائي في حين أن الكثير من السلاسل الزمنية التي تنشأ في الواقع تظهر اتجاهًا عشوائيًا stochastic trend. العيب الثالث أن هذه الطريقة تفترض عدم الارتباط بين مشاهدات السلسلة، وهذا الفرض نادراً ما يكون متحققًا حيث تتميز معظم السلاسل الزمنية الفعلية بوجود أنماط مختلفة من الارتباط كما سنرى في الفصول القادمة، ومن ثم فإن تقديرات المربعات الصغرى التي تعتمد عليها هذه الطريقة تفقد خصائصها المثالية ومن ثم تكون التنبؤات التي تحصل عليها من هذه الطريقة غير موثوق بها. العيب الرابع أنه لا يمكن تكوين فترة ثقة حقيقية في حالة السلاسل الموسمية. العيب الخامس والأخير أن هذه الطريقة تفترض ثبات المعاملات الموسمية s_t في السنوات المختلفة بمعنى أن أثر فصل الصيف مثلاً على الظاهرة في العام الحالي يساوي أثر فصل الصيف على الظاهرة في العام الماضي والأعوام القادمة، وقد يكون هذا الفرض بعيدًا عن الواقع في حالة السلاسل الزمنية طويلة الآجل.

تمارين على الباب الأول

1. ما هو الفرض الأساسي الذي تعتمد عليه طرق التنبؤ باستخدام السجل التاريخي؟
2. اشرح باختصار معنى كل مركبة من مركبات السلسلة الزمنية؟
3. اشرح الفرق بين نماذج السلاسل الزمنية والنماذج السببية؟
4. عند قياس دقة التنبؤ أو حجم الأخطاء اشرح لماذا لا يستخدم مجموع الأخطاء؟
5. اذكر العوامل التي يجب أن تؤخذ في الاعتبار عند اختيار أسلوب التنبؤ الملائم؟
6. هل أفضل أسلوب للتنبؤ هو دائمًا الأسلوب الأكثر دقة؟ اشرح سبب إجابتك؟

7. اختيار أفضل نموذج تمهيد أسي يعتمد على قيمة متوسط مربعات الأخطاءMSE أو على قيمة متوسط الأخطاء (الانحرافات) المطلقة MAD. هل استخدام كل منهما يعطي نفس النتائج؟ اشرح.

8. عرف الموسمية وطول الدورة ؟ وكيف يمكنك معرفة ما إذا كانت السلسلة تحتوي على مركبة موسم؟

9. اعط مثالين من واقع الحياة العملية لظواهر بها:

a. تغيرات موسمية طولها سنة.

b. تغيرات موسمية طولها شهر.

c. تغيرات موسمية طولها أسبوع.

d. تغيرات موسمية طولها يوم.

10. يعطي الجدول الآتي المبيعات السنوية بآلاف الدولارات من إحدى السلع والقيم المقدرة هذه المبيعات المحسوبة من أحد النماذج:

السنة	1995	1996	1997	1998	1999
قيمة المبيعات	260	250	265	251	240
القيم المقدرة	255	260	260	258	235

a. احسب الأخطاء المقدرة

b. احسب متوسط مربعات الأخطاء MSE ومتوسط الانحرافات المطلقةMAD ومتوسط الأخطاء النسبية المطلقة MAPE.

11. يوضح الجدول الآتي قيمة القروض التي مولها أحد البنوك بملايين الدولارات في الفترة من سنة 1995 إلى سنة 2001

السنة	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
قيمة القروض	12	13	11	13	12	14	11

a. استخدم طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة في إيجاد جميع التنبؤات الممكنة مرة باستخدام $k = 3$ ومرة أخرى باستخدام $k = 4$ وأوجد متوسط الانحرافات المطلقة في كل حالة.

b. تنبأ بقيمة القروض التي سيمولها البنك في سنة 2002 باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة.

c. قدر القيمة الابتدائية $\hat{y}_0(1)$ باستخدام المتوسط الحسابي لقيم السلسلة ثم استخدم طريقة التمهيد الأسي لإيجاد جميع التنبؤات المناظرة لقيم السلسلة مرة باستخدام $w = 0.75$ ومرة أخرى باستخدام $w = 0.95$. أي التنبؤات أفضل ؟ اشرح سبب إجابتك.

d. إعرض القيم الفعلية والتنبؤات المناسبة في شكل واحد وعلق على الرسم.

12. تستخدم إحدى الشركات التمهيد الأسي للتنبؤ بأرباحها. في محاولة لإيجاد أفضل قيمة لمعامل التخفيض w حصلت الشركة على المعلومات الآتية .

w	0.20	0.25	0.30	0.35
SSE	215.31	120.351	230.14	236

a. باستخدام هذه النتائج ما هو انسب معامل تخفيض ؟ اشرح.

b. هل يمكن الحصول على نتائج أفضل ؟اشرح.

13. تمثل البيانات الآتية عدد الحاصلين على أحد الدبلومات العالية في إحدى الكليات العملية في عدة سنوات متتالية

60 64 58 62 64 55 55 63

a. إذا كان معامل التخفيض يساوي 0.95 قدر $\hat{y}_0(1)$ بطريقة مناسبة.

b. أوجد قيمة التنبؤ عند $t = 4$ وأوجد e_4.

c. إذا كانت $y_9 = 64$ هل تعتقد أن $w = 0.95$ مناسبة لهذا النموذج؟اشرح.

14. البيانات الآتية توضح متوسط الناتج الشهري (بالطن) من أحد المحاصيل الزراعية في إحدى السنوات

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
متوسط المحصول	8.5	8.6	9	10.5	11	9	9.5	11	11.5	12	12	11.5

a. باستخدام متوسط القيم الست الأولي أحسب $\hat{y}_0(1)$. أيهما أفضل $w = 0.7$ أو $w = 0.9$ ؟ أشرح سبب إجابتك.

b. تنبأ بمتوسط المحصول في الشهر التالي.

15. تمثل البيانات الآتية عدد حالات الزواج بالألف التي تمت في إحدي المدن خلال الفترة من 1990 إلى 1997.

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
عدد حالات الزواج بالألف	50	45	55	60	63	65	70	72

a. ارسم هذه البيانات واختر نموذجا مناسبا للاتجاه العام موضحًا سبب اختيارك.

b. قدر منحنى الاتجاه العام المناسب بطريقة المربعات الصغرى.

c. قدر قيمة الاتجاه العام في سنة 1998 وكون فترة ثقة مناسبة لها.

d. وفق منحنى الاتجاه العام بطريقة المتوسطات المتحركة وارسم هذا المنحنى مع القيم الأصلية وعلق على الرسم.

e. أي المنحنين أكثر تمثيلاً للاتجاه العام؟ اشرح سبب أجابتك

f. استبعد أثر الاتجاه العام من هذه البيانات.

16. تمثل البيانات الآتية عدد السيارات (بالألف) التي تم استيرادها من إحدى البلاد في الفترة من سنة 1998 إلى سنة 2002.

السنة	1998	1999	2000	2001	2002
عدد السيارات بالآلف	50	40	55	58	60

a. قدر معادلة الاتجاه الخطية لعدد السيارات التي تم استيرادها.

b. احسب القيم الاتجاهية المناظرة للقيم الفعلية.

c. استبعد أثر الاتجاه العام من البيانات.

d. تنبأ بعدد السيارات التي سوف يتم استيرادها من هذه الدولة في سنة 2001 وكون فترة ثقة مناسبة لهذا العدد.

17. في إحدى العمليات الكيميائية رصدت درجة الحرارة الناتجة كل 5 دقائق وحصلنا على المعلومات الآتية

19.8 19.7 19.9 20.2 20.3 20.5 21.2 22.2 23.8 22.1

21.8 21.2 20.9 20.2 20

a. قدر معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها من الدرجة الثانية.

b. احسب القيم الاتجاهية.

c. استبعد أثر الاتجاه العام من البيانات.

d. كون فترة ثقة لدرجة الحرارة التالية.

18. إذا كانت معادلة الاتجاه العام الملاءمة لإحدى الظواهر الطبيعية هي

$$y_t = \beta_o + \varepsilon_t$$

حيث β_0 مقدار ثابت و ε_t متغيرات عشوائية غير مرتبطة توقعها الصفر وتباينها ثابت. اثبت أن تقدير معادلة الاتجاه العام هو

$$\hat{y}_t = \bar{y}$$

19. تعطي البيانات الآتية كمية الصادرات ربع السنوية بالطن من أحد المحاصيل الزراعية التي غادرت البلاد من أحد الموانى في ثلاث سنوات.

الموسم / السنة	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
2000	20	25	35	44
2001	23	28	40	48
2002	28	35	50	60

a. ارسم هذه البيانات، هل تعتقد أن الصادرات تتعرض لتغيرات موسمية؟ اشرح.

b. اقترح نموذجًا مناسبًا لهذه البيانات موضحًا سبب اقتراحك.

c. كون فترة ثقة مناسبة للصادرات في الربع الأول سنة 2003 .

20. البيانات الآتية تمثل متوسط الدخل ربع السنوي بالدولار للعاملين في إحدى الشركات السياحية في الفترة من سنة 1999 إلى 2000

الربع / السنة	1	2	3	4
1999	30	35	38	45
2000	35	38	42	55
2001	32	36	40	50

a. ارسم البيانات وعلق على الرسم.

b. هل تعتقد أن نموذج التجزيء الضربي مناسب لهذه البيانات؟ اشرح.

c. اوجد تقديرات مناسبة للمعاملات الموسمية وفسر معنى كل تقدير.

d. استبعد أثر الموسم من البيانات وارسم البيانات المعدلة.

e. اقترح نموذجًا مناسبًا للاتجاه العام ووضح سبب اقتراحك

f. أوجد تنبؤ النقطة والفترة لمتوسط دخل العامل في الفترة الزمنية التالية.

21. البيانات الآتية تمثل قيمة المبيعات ثلث السنوية بالمليون دولار لنوع معين من لعب الأطفال في أحد المتاجر.

الموسم \ السنة	1995	1996	1997
1	10	12	13
2	14	13	15
3	13	11	13

a. هل تعتقد أن المبيعات تتعرض لتغيرات موسمية؟

b. أوجد تقدير معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها من الدرجة الثانية .

c. هل تعتقد أن معادلة الدرجة الثانية ملاءمة لشرح الاتجاه العام؟ اشرح.

d. تنبأ بالنقطة والفترة لقيمة المبيعات في الثلث الثاني من سنة 1998.

الباب الثاني

مفاهيم أساسية
BASIC CONCEPTS

□ السكون □ دالة الارتباط الذاتي □ دالة الارتباط الذاتي الجزئي □ مؤثرات السلاسل الزمنية □ السلاسل الزمنية غير الساكنة المتجانسة



عرفت العقود الأخيرة من القرن العشرين التحليل الحديث للسلاسل الزمنية من خلال منهجية علمية قدمت بواسطة العالمين بوكس Box وجينكنز Jenkins مع مطلع السبعينات من القرن العشرين. وتعتمد هذه المنهجية – والتي جاءت في شكل منظومة عملية لم يعرف الفكر الإحصائي لها مثيلاً من قبل – على دراسة الطبيعة العشوائية للسلطة الزمنية المشاهدة بدلاً من الاهتمام بتوفيق دالة رياضية للبيانات المشاهدة. ولذلك فإن هذه المنهجية الحديثة تفترض دائمًا وجود عملية عشوائية (نظرية) Stochastic process قادرة على توليد أو خلق عدد لا نهائي من السلاسل الزمنية ذات طول معين n وأن السلسلة المتاحة أو المشاهدة أو المرصودة realization – والتي يطلق عليها أحيانًا عينة – هي فقط إحدى هذه السلاسل وأن هذه السلسلة المرصودة تدرس بغرض التعرف على طبيعة وصفة العملية العشوائية النظرية التي أوجدت هذه السلسلة.

وتعتبر منهجية بوكس وجينكنز الأكثر شيوعًا في الأوساط العلمية النظرية والتطبيقية – خاصة في العالم المتقدم – والمشكاة الأساسية التي انبثقت منها سائر المنهجيات الحديثة والمرجعية الرئيسية للحكم على جودة وملائمة الكثير من هذه المنهجيات. فقد أثبتت هذه المنهجية كفاءة عالية في النمذجة والتنبؤ بالسلاسل الزمنية التي تنشأ في مجالات المعرفة المختلفة مثل الاقتصاد وإدارة الأعمال والبيئة والكيمياء والهندسة وغيرها. وتتميز طريقة بوكس وجينكنز بعدة مميزات أهمها

1-أنها منهجية شاملة بمعنى أنها تقدم حلولاً جيدة لجميع مراحل التحليل في شكل منظومة أكثر علمية ومنطقية من الأساليب الأخرى لبناء النماذج وتشخيصها وتقدير معالمها والتنبؤ بالمشاهدات المستقبلية.

2- تميز وثراء النماذج العشوائية التي تتعامل معها هذه المنهجية القادرة على عكس وترجمة الآلية الاحتمالية لكثير من العمليات العشوائية التي تظهر في مجالات التطبيق المختلفة والتي تعرف بنماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية أو نماذج ARIMA.

3- لا تفترض الاستقلال بين مشاهدات السلسلة وإنما تستغل نمط الارتباط الموجود بالفعل بين هذه المشاهدات في عملية النمذجة والتنبؤ مما يؤدي عادة إلى تنبؤات أكثر دقة ومصداقية من تلك التي نحصل عليها بالطرق التقليدية.

4- تعطي فترات ثقة ذات مصداقية عالية للقيم المستقبلية إذا ما قورنت بالأساليب التقليدية الأخرى كالانحدار والتمهيد الأسي.

وفي الحقيقة أن منهجية بوكس وجينكنز يمكن اعتبارها بمثابة نظام تنبؤ كامل موثوق به يمكن استخدامه مع معظم السلاسل الزمنية التي تنشأ في مجالات المعرفة المختلفة.

وبالرغم من الانتشار الهائل لأسلوب بوكس وجينكنز منذ السبعينات من القرن العشرين – والذي ما زال يتصدر قائمة الأساليب الحديثة لتحليل السلاسل الزمنية – إلا أن تطبيق هذا الأسلوب بشكل دقيق يتطلب خبرة ومهارة وممارسة قد لا تتوافر لدى الكثير من الباحثين. وفي الواقع أن كثير من الأبحاث والدراسات في المنطقة العربية تعاني من بعض القصور عند تطبيق هذا الأسلوب علميًا خاصة إذا كان الباحث لا يتمتع بالخبرة والمهارة والممارسة الكافية للتعرف على النموذج المبدئي الملائم وتطويره من خلال الدراسة وحتى استخدامه في التنبؤ. بالإضافة إلى ذلك فإن أسلوب بوكس وجينكنز يعاني من بعض العيوب أهمها:

1- يتطلب توافر 50 مشاهدة على الأقل للحصول على نموذج جيد، ولذلك فإن هذا الأسلوب عادة ما يتم تطبيقه عندما تكون فترة المعاينة قصيرة (دقيقة – ساعة – يوم – أسبوع – شهر ...). أما عندما تكون فترة المعاينة طويلة – كما هو الحال في البيانات السنوية – فقد لا تتوافر البيانات التاريخية المطلوبة لبناء نموذج جيد.

2- عدم توافر آلية لتحديث التقديرات عندما تتوافر بيانات إضافية. فعندما تتوافر مشاهدة إضافية جديدة لابد من إعادة بناء نموذج بوكس وجينكنز وتقدير معالمه وتشخيصه قبل استخدامه في التنبؤ، ولذلك فإن تكاليف استخدام هذا الأسلوب عادة ما تكون أكثر من تكاليف الطرق التقليدية الأخرى،ومن ثم فإن هذا الأسلوب عادة ما يستخدم لتحليل عدد محدود من السلاسل الزمنية مثل بيانات الناتج القومي وأعداد المواليد والبطالة وأعداد الحجاج وحوادث المرور.أما الحالات التي تتطلب تحليل الكثير من البيانات الزمنية مثل تحليل مبيعات الآلاف من السلع الموجودة في أحد المحلات الكبيرة فقد يكون هذا الأسلوب غير مناسب بسبب ارتفاع تكاليفه.

ويهدف هذا الباب أساسًا إلى تقديم التعاريف والمفاهيم الضرورية لاستيعاب القارئ للتحليل الحديث للسلاسل الزمنية باستخدام منهجية بوكس وجينكنز. وبالتحديد فإن المادة العلمية لهذا الباب تهدف إلى تعريف القارئ بمعنى السكون بنوعيه التام والضعيف وأهميته في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية. كما تهدف المادة العلمية لهذا الباب أيضًا إلى دراسة ماهية دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي وخصائص وأهمية هاتين الدالتين في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية والتعرف على الطرق المختلفة لتقدير هاتين الدالتين. وأخيراً تهدف المعادلة العلمية لهذا الباب إلى تعريف القارئ بأهم مؤثرات السلاسل الزمنية وتزويده ببعض التحويلات الرياضية البسيطة الضرورية لتسكين السلاسل المتجانسة.

وبنهاية هذا الباب سيكون الطالب قادرًا على:

- فهم مدلول السكون التام والسكون الضعيف.
- معرفة أهمية السكون.
- اختبار سكون السلسلة.
- تعريف دالة الارتباط الذاتي وتقديرها والتعرف على خصائصها.
- التعرف على الدور الذي تلعبه دالة الارتباط الذاتي في التحليل الحديث.
- تعريف دالة الارتباط الذاتي الجزئي ومعرفة خصائصها.
- التعرف على الدور الذي تلعبه دالة الارتباط الذاتي الجزئي في التحليل الحديث.
- التعرف على الطرق المختلفة لتقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي.
- تعريف نظام (معادلات) يوول- والكر Yule-Walker واستخدامه.
- تعريف مؤثرات السلاسل الزمنية الرئيسية والتعرف على خصائصها.
- فهم مدلول السلاسل الزمنية غير المتجانسة.
- تسكين السلاسل غير الساكنة المتجانسة.

2.1 السكون Stationarity

يفترض التحليل الحديث للسلاسل الزمنية أن أي مشاهدة معينة y_{t_1} عند نقطة زمنية معينة t_1 هي مفردة واحدة سحبت عشوائيًا من متغير عشوائي Y_{t_1} - يمثل جميع القيم التي يمكن أن تشاهد عند الزمن t_1 - له دالة توزيع احتمال تراكمي $F(y_{t_1})$. وبالمثل يفترض هذا التحليل أن أي مشاهدتين (y_{t_1}, y_{t_2}) عند أي نقطتين زمنيتين مختلفتين (t_1, t_2) هي قيمة واحدة ثنائية الأبعاد سحبت عشوائيًا من متغير عشوائي ثنائي الأبعاد Bivariate random variable (Y_{t_1}, Y_{t_2}) - يمثل جميع القيم ثنائية الأبعاد التي يمكن أن تشاهد عند النقطتين الزمنيتين (t_1, t_2) - له دالة توزيع احتمال تراكمي ثنائية الأبعاد $F(y_{t_1}, y_{t_2})$. وبصفة عامة يفترض التحليل الحديث أن المشاهدات $(y_{t_1}, y_{t_2}, ..., y_{t_m})$ عند النقاط الزمنية المختلفة $(t_1, t_2, ..., t_m)$ هي قيمة واحدة متعددة الأبعاد (m) سحبت عشوائيًا من متغير عشوائي متعدد الأبعاد

Multivariate random variable $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_m})$ – يمثل جميع القيم متعددة الأبعاد التي يمكن أن تشاهد عند النقاط الزمنية المختلفة $(t_1, t_2, ..., t_m)$ – له دالة توزيع احتمال مشترك تراكمي متعدد الأبعاد $F(y_{t_1}, y_{t_2}, ..., y_{t_m})$.

وفي الحالة الخاصة الهامة والتي يكون فيها $m = n$ و $t_i = i ; i = 1, 2, ... n$ حيث يمثل n طول السلسلة المتاحة، فإن مشاهدات السلسلة المتاحة $(y_1, y_2, ..., y_n)$ والمرصودة عند النقاط الزمنية $(1, 2, ..., n)$ ينظر إليها كقيمة واحدة متعددة الأبعاد سحبت عشوائيًا من متغير عشوائي متعدد الأبعاد $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ – يمثل جميع القيم متعددة الأبعاد (n) التي يمكن أن تشاهد عند النقاط الزمنية المختلفة $(1, 2, ..., n)$ – له دالة احتمال مشترك تراكمي متعدد الأبعاد $F(y_1, y_2, ..., y_n)$. أى أن منهجية بوكس وجينكنز تفترض دائمًا وجود عملية عشوائية (نظرية) قادرة على توليد عدد لا نهائي من السلاسل الزمنية وأن السلسلة المتاحة ما هي إلا مجرد إحدى هذه السلاسل a realization وأن هناك توزيع احتمالي معين للمتغيرات $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$.

ويقال أن السلسلة (العملية) الزمنية ساكنة إذا كانت الخصائص الإحصائية لها ثابتة خلال الزمن أي أن هذه الخصائص لا تتغير بالإزاحة إلى الأمام أو إلى الخلف أى عدد من الوحدات الزمنية. والخصائص الإحصائية للسلسلة (العملية) يمكن وصفها بشكل مؤكد وكامل عن طريق دالة الاحتمال التراكمي ويمكن وصفها بشكل جزئي عن طريق بعض المؤشرات الهامة وأهمها التوقع والتباين والتغاير (عزوم الدرجة الأولى والثانية). ولذلك يفرق الإحصائيون بين نوعين من السكون هما السكون التام (الكامل) والسكون الضعيف.

2.1.1 السكون التام Strictly Stationarity

يقال أن السلسلة الزمنية أو العملية العشوائية المتقطعة $\{y_t\}$ مؤكدة السكون إذا كان توزيع الاحتمال التراكمي المشترك لأي مجموعة جزئية من المتغيرات التي

تتكون منها السلسلة (العملية) لا يتأثر بالإزاحة Shift إلى الأمام أو إلى الخلف أي عدد من الوحدات الزمنية. فإذا كانت $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ مجموعة جزئية من الوحدات الزمنية حيث $m = 1, 2, \ldots$ وكان $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ فإن السلسلة (العملية) $\{y_t\}$ تامة السكون إذا كانت دالة الاحتمال التراكمي المشتركة للمتغيرات $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_m})$ تساوي دالة الاحتمال التراكمي المشتركة للمتغيرات $(Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \ldots, Y_{t_m+k})$ لأي مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ وأي إزاحة k. وبصورة رياضية فإن السلسلة $\{y_t\}$ تامة السكون إذا كان

$$P(Y_{t_1} \le c_1, Y_{t_2} \le c_2, \ldots, Y_{t_m} \le c_m) = P(Y_{t_1+k} \le c_1, Y_{t_2+k} \le c_2, \ldots, Y_{t_m+k} \le c_m) = F(c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

(2.1.1)

لأي مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ وأي إزاحة k. وتمثل القيم $(c_1, c_2, \ldots c_m)$ أي ثوابت تقع داخل نطاق العملية العشوائية والسكون التام بمفهومه السابق يعني ببساطة أن آلية التوليد للعملية العشوائية تحت الدراسة ثابتة من خلال الزمن بحيث إنشكل النموذج وقيم معالمه لا تتغير بتغير الزمن. وفي الحالة الخاصة الهامة التي يكون فيها $m = n$ و $t_i = i \; ; \; i = 1, 2, \ldots, n$ نجد أن السكون التام يعني أن

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = F(y_{1+k}, y_{2+k}, \ldots, y_{n+k}) \quad \forall \;\; k = \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (2.1.2)$$

مثال (1):

إذا كانت السلسلة $\{y_t\}$ تامة السكون، اثبت أن

(i) $F(y_t) = F(y_{t+k})$

(ii) $F(y_t, y_{t-1}) = F(y_{t+k}, y_{t-1+k})$

(iii) $F(y_2, y_5, y_{10}) = F(y_3, y_6, y_{11}) = F(y_1, y_4, y_9)$

الحـــــــل:

(i) ضع $t_1 = t, m = 1$ في (2.1.1) نصل إلى

$$P(Y_t \le c_1) = P(Y_{t+k} \le c_1) \quad \forall c_1$$

ومن ثم فإن

$$F(y_t) = F(y_{t+k}) \quad \forall k$$

(ii) ضع $t_1 = t, t_2 = t\text{-}1, m = 2$ في(2.1.1) نصل إلى

$$p(Y_t \le c_1, Y_{t-1} \le c_2) = P(Y_{t+k} \le c_1, Y_{t-1+k} \le c_2) \quad \forall (c_1 \ \ c_2)$$

ومن ثم فإن

$$F(y_t, y_{t-1}) = F(y_{t+k}, y_{t-1+k}) \quad \forall k$$

(iii) ضع $k = \pm 1, t_1 = 2, t_2 = 5, t_3 = 10, m = 3$ في (2.1.1) نصل إلى

$$P(Y_2 \le c_1, Y_5 \le c_2, Y_{10} \le c_3) = P(Y_3 \le c_1, Y_6 \le c_2, Y_{11} \le c_3)$$
$$= p(Y_1 \le c_1, Y_4 \le c_2, Y_9 \le c_3) \forall (c_1, c_2, c_3)$$

ومن ثم فإن

$$F(y_2, y_3, y_{10}) = F(y_3, y_6, y_{11}) = F(y_1, y_4, y_9)$$

ومن التعريف السابق نجد أن السكون التام للعملية العشوائية يؤدي بالضرورة إلى ثبات متوسط وتباين العملية العشوائية إذا كانت العزوم من الرتبة الأولى والثانية موجــودة. أيضًا التغاير بين أى متغيرين Y_s, Y_t سيعتمد فقط على الفجوة lag الزمنية التي تفصل بين هذين المتغيرين . أى أن السكون التام يؤدي إلى أن

(i) $\mu_t = E(Y_t) = \mu, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(ii) $\sigma_t^2 = V(Y_t) = \sigma^2, t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

(iii) $\gamma(s, t) = Cov(Y_s, Y_t) = E[(Y_s - \mu)(Y_t - \mu)] = \gamma(s - t)$

أى أن التغاير بين (y_s, y_t) سيكون دالة فقط في الفجوة الزمنية (s-t) وبالتالي فإن

$$\gamma(t, t-k) = Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma(k) \quad ; t, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

وتجدر الإشارة إلى أن تباين العملية Y_t يمكن اعتباره بمثابة حالة خاصة من دالة التغاير الذاتي $\gamma(s, t)$ إذا كان s = t. أى أن $V(Y_t) = \gamma(t, t)$ وإذا كانت السلسلة ساكنة فإن

$$V(Y_t) = \gamma(t, t) = \gamma(0), t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

2.1.2 السكون الضعيف Weak Stationarity

يعرف السكون التام السابق ذكره بأسماء متعددة، فأحيانًا يطلق عليه السكون المؤكد وأحيانًا يطلق عليه السكون القوي. ولدراسة خصائص العملية العشوائية $\{y_t\}$ واختبار سكونها التام يجب معرفة دالة الاحتمال التراكمي المشتركة لأى مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1, t_2, ..., t_m)$ وأى قيمة صحيحة موجبة m، أو على الأقل تقديرها بشكل جيد إحصائيًا. ويعد هذا الأمر من الأمور الصعبة إن لم يكن مستحيلاً . ولحسن الحظ أن في موضوعات الإحصاء بصفة عامة وفي مجال السلاسل الزمنية بصفة خاصة أن العزوم الأولى والثانية – إذا كانت موجودة – غالبًا ما تعكس الملامح الرئيسية للعمليات العشوائية بافتراض خطية هذه العمليات وهى العمليات التي سنتعامل معها فقط في هذا الكتاب. فضلاً عن ذلك فإن هذه المؤشرات كافية لتوصيف خصائص التوزيع الاحتمالي للعملية العشوائية بشكل كامل إذا افترضنا أنها عملية جاوس

Gaussian Process أى أن المتغير العشوائي $Y=(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_m})$ هو متغيــر معتاد متعدد Multivariate normal. ولذلك فقد عرف الفكر الإحصائي نوعًا آخر من السكون يرتبط بالعزوم الأولى والثانية فقط إذا كانت موجودة يطلق عليــه بالــسكون الضعيف. ويقال أن العملية (السلسلة) المتقطعة $\{y_t\}$ ساكنة سكونًا ضعيفًا إذا كانــت العزوم حتى الرتبة الثانية موجودة تحقق الشروط الآتية

1. التوقع أو متوسط العملية μ_t لا يعتمد على الزمن t، أى أن

$$\mu_t = E(Y_t) = \mu \quad ; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. التباين σ_t^2 لا يعتمد على الزمن t أى أن

$$\sigma_t^2 = V(Y_t) = \gamma(0) \; ; \; t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3. التغاير بين أى متغيرين يعتمد فقط على الفجوة lag الزمنية التي تفصل بينهما، أى أن

$$Cov(Y_{t-k}, Y_t) = \gamma(k) \quad ; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad ; \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ويتضح من العرض السريع السابق أن السكون التام دائماً يؤدي إلـــى الـــسكون الضعيف إذا كانت العزوم حتى الرتبة الثانية موجودة. وسكون السلسلة بصفة عامـــة يجعل التحليل الإحصائي لها أسهل. ولحسن الحظ أننا في مجال الإحصاء لا نـــشترط عادة أن تكون السلسلة الزمنية مؤكدة السكون ولكن نكتفي فقط بالسكون الضعيف. كما أنه لحسن الحظ أيضاً أنه بالرغم من أن معظم السلاسل الزمنية الفعلية التي تنشأ فـــي الاقتصاد وإدارة الأعمال والهندسة والفيزياء وغيرها غير ساكنة إلا أنه يمكن تحويلها بسهولة إلى سلاسل أخرى ساكنة باستخدام بعض التحويلات الرياضية كما سنري في

نهاية هذا الباب. ومن الآن فصاعداً عندما نذكر كلمة "السكون" فإننا نعنـــى الــسكون الضعيف.

2.1.3 أهمية السكون

إذا كانت الخصائص الإحصائية للعملية العشوائية التي ولدت السلسلة الزمنيـــة المتاحة (المرصودة) غير ساكنة nonstationary فإننا سنواجه بالعديد من الصعوبات الهامة والخطيرة. من هذه الصعوبات كثرة المؤشرات (المعالم) الرئيسية مثل التوقعات والتباينات والتغايرات وصعوبة تفسير هذه المؤشرات وصعوبة – أو استحالة – تقدير هذه المؤشرات بأي مستوى دقة من البيانات المتاحة. كما يصعب في مثل هذه الحالات نمذجة البيانات بشكل مباشر.بواسطة نموذج إحصائي بسيط يعكس الخصائص الحقيقية للعملية العشوائية. وفيما يلي عرض مبسط لأهمية الدور الذي يلعبه فرض السكون في التغلب على مثل هذه الصعوبات.

1. تخفيض عدد المعالم وسهولة تفسيرها

إذا افترض أن العملية $\{y_t\}$ غير ساكنة وأنه قد تم رصد مشاهدة واحدة عنـــد كل نقطة زمنية –كما هو الحال في معظم السلاسل الفعلية – بحيث أصبح لدينا السلسلة الزمنية المشاهدة $y_1, y_2, ..., y_n$ حيث يرمز n إلى عدد المـــشاهدات المتاحـــة أو مـــا يعرف عادة بطول السلسلة وأحياناً بحجم العينة. فإن المؤشرات (المعـــالم) الرئيـــسية للعملية العشوائية النظرية هي

$$E(Y) = [E(Y_1) \quad E(Y_2) \cdots E(Y_n)]' = [\mu_1 \quad \mu_2 \cdots \mu_n]'$$

$$V(Y) = (\gamma(s,t)) = \begin{bmatrix} \gamma(1,1) & \gamma(1,2)\cdots & \gamma(1,n) \\ \gamma(2,1) & \gamma(2,2)\cdots & \gamma(2,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(n,1) & \gamma(n,2)\cdots & \gamma(n,n) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

حيث يفسر المتوسط للعملية العشوائية عند الزمن t أي μ_t بأنه المتوسط لجميع القيم التي يمكن أن تولدها العملية العشوائية عند الزمن t، كما يفسر تباين العملية العشوائية عند الزمن t أي $\gamma(t,t)$ بأنه تباين هذه القيم، أما التغاير $\gamma(s,t)$ فيقيس درجة الاعتماد الخطي بين جميع القيم التي يمكن أن تولدها العملية عند الزمن s وتلك القيم التي يمكن أن تولدها عند الزمن t. ويلاحظ أن عدد التوقعات المختلفة هو n وعدد معالم مصفوفة التباين والتغاير المختلفة هو $n(n+1)/2$، ومن ثم فإن عدد المعالم الرئيسية التي يجب تقديرها للعملية غير الساكنة هو $n(n+3)/2$ وهو عدد كبير جداً خاصة إذا كان عدد المشاهدات كبيراً. أما في حالة السكون فإن عدد المعالم يكون $(n+1)$ فقط هي $\mu, \gamma(0), \gamma(1),\ldots, \gamma(n-1)$. والتوقع μ في حالة السكون يمثل المستوى العام للسلسلة أو العملية، كما أن التباين $\gamma(0)$ يقيس تشتت العملية حول المستوى العام μ. بالمثل يمكن تفسير التغاير الذاتي عند الفجوة الزمنية k أي $\gamma(k)$، فالتغاير الذاتي $\gamma(1)$ يعني في حالة السكون التغاير بين المتغيرات التي تبعد عن بعضها البعض فجوة زمنية Time lag مقدارها الوحدة، والتغاير الذاتي $\gamma(2)$ يعني التغاير بين المتغيرات التي تبعد عن بعضها البعض فجوة زمنية مقدارها وحدتان. وبالمثل يمكن تفسير باقي التغايرات الذاتية $\gamma(3), \gamma(4),\ldots, \gamma(n-1)$. ومن ثم يمكن التعبير عن ذلك فى شكل علاقة دالية بين الفجوات $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$ وقيم التغايرات الذاتية. وتعرض هذه الدالة عادة في شكل رياضي أو بياني أو جدولي كما هو الحال في عرض أي دالة متقطعة.

2. إمكانية التحليل الاستطلاعي

إذا كانت العملية ساكنة فإن دالة التوزيع الهامشية $F(y_t)$ تكون هي نفسها لكل الأزمنة المتاحة، ومن ثم يمكن القيام بتوصيف هذا التوزيع مبدئياً عن طريق أدوات التحليل الاستكشافي Exploratory data analysis – مثل المدرج التكراري والأغصان والأوراق ورسم النقاط والصندوق والشعيرات– بغرض معرفة شكل التوزيع من ناحية التماثل والالتواء واكتشاف القيم الشاذة وغيرها من الخصائص التي تفيد في تكوين صورة مبدئية عن دالة التوزيع الاحتمالي الهامشي. لمزيد من التفاصيل حول التحليل الاستكشافي انظر شعراوي، سمير و إسماعيل، محمد (2002)

3. إمكانية تقدير المعالم

ذكرنا أن عدد المعالم الرئيسية للعملية غير الساكنة يساوي n(n+3)/2 وتقدير هذا العدد باستخدام n فقط من المشاهدات بالطبع أمر مستحيل من الناحية الإحصائية إلا إذا وضعت بعض القيود على هذه المعالم. فعلى سبيل المثال من المستحيل تقدير المتوسط للعملية عند الزمن t أي μ_t بأي مستوي ثقة وذلك لأن عند الزمن t لدينا مشاهدة واحدة هي y_t . وعلي الرغم من أنه يمكن استخدام المشاهدة y_t كتقدير فطري للمعلمة μ_t فلا يمكن تقدير تباين العملية عند نفس النقطة الزمنية t. أما في حالة السكون فإن كل قيمة من قيم السلسلة المتاحة ينظر إليها كمشاهدة مسحوبة من نفس المجتمع الذي متوسطه μ وتباينه $\gamma(0)$ وبالتالي يمكن القيام باستدلالات إحصائية حول التوقع μ والتباين $\gamma(0)$ باستخدام الوسط الحسابي للسلسلة المتاحة وتباينها كالتالي

$$\bar{y} = \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} y_t$$

$$s_y^2 = \hat{\gamma}(0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2$$

وبالمثل يمكن تقدير التغاير الذاتي $\gamma(k)$ كالتالي

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y}) \ , \quad k = 1, 2, ..., n-1$$

وعلي الرغم من أن افتراض سكون السلسلة يؤدي إلى تخفيض عدد المعالم إلى (n+1)، إلا أن هذا العدد لا يزال كبيراً ولا يمكن تقديره بشكل جيد إلا بوضع قيود أخرى بخلاف السكون لتخفيض هذا العدد. وسنرى فيما بعد أنه يمكن تخفيض هذا العدد بشكل كبير إذا افترضنا أيضاً – بالإضافة إلى فرض السكون– أنه يوجد نموذج إحصائي بسيط يعتمد على عدد محدود من المعالم قادر على عكس الخصائص الاحتمالية للعملية العشوائية التي ولدت بيانات السلسلة المتاحة.

4. سهولة وجودة نمذجة البيانات

يتم التوصيف الكامل للطبيعة العشوائية للسلسلة الزمنية المشاهدة $y_1, y_2, ..., y_n$ بواسطة دالة الاحتمال التراكمي المشتركة $F(y_1, y_2, ..., y_n)$، ومن ثم يمكن التنبؤ بالمشاهدات المستقبلية $y_{n+1}, y_{n+2}, ...$ عن طريق دوال الاحتمال التراكمي الشرطية للمتغيرات $Y_{n+1}, Y_{n+2}, ...$ على الترتيب. فعلى سبيل المثال نستخدم دالة الاحتمال التراكمي الشرطية $F(y_{n+1} | y_1, y_2, ..., y_n)$ للتنبؤ بالمشاهدة المستقبلية الأولي. ولا يخفى على القارئ صعوبة –إن لم يكن استحالة – تحديد دالة الاحتمال التراكمي المشتركة، ويستغنى عن ذلك في مجالات السلاسل الزمنية بمحاولة إنشاء نموذج يحتوي عل عدد محدود من المعالم يعكس الخصائص الاحتمالية للعملية العشوائية التي ولدت السلسلة المتاحة $y_1, y_2, ..., y_n$ ويفيد في التنبؤ. وبالطبع فإن إيجاد مثل هذا النموذج يكون أسهل كثيراً في حالة السكون. فالسكون غالباً ما يساعد

على إنشاء نموذج بسيط يحتوي على عدد محدود من المعالم لا تتغير هي والنمـوذج بتغير الزمن كما سنرى فيما بعد.

5. إمكانية تطبيق نظرية وولد Wold

الأفكار النظرية التي طرحت بواسطة Yule(1921,1927) والتي طورت فيما بعد بواسطة Wold (1938) في نظرية التجزئ المنسوبة إليه تؤكد على أن أي عملية عشوائية ساكنة $\{y(t)\}$ يمكن التعبير عنها كتوليفة خطية في متتابعة من المتغيرات العشوائية غير المرتبطة $\{\varepsilon(t)\}$ توقعها الصفر وتباينها ثابت بالإضافة إلى مركبة أخرى محددة D_t كما يلي

$$y_t = D_t + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\, \varepsilon_{t-j} \;, \quad \psi_0 = 1$$

والسكون هنا له مردودان أساسيان، أولهما أن المعاملات ψ_j ثوابتَ لا تعتمد على الزمن t، وثانيهما أن عدد المعاملات ψ_j محدود أو غير محـدود ولكـن لهـا خصائص رياضية جيدة مثل تقارب $\sum\psi_i, \sum\psi_i^2$ وذلك لـضمان سـكون التوقـع والتباين.

نظرية وولد الهامة تعطي مبررات نظرية مقبولـة مـن قبـل الإحـصائيين النظريين لقبول النماذج التي استخدمت بواسطة بوكس وجينكنز - والتي ستستخدم في هذا الكتاب- حيث إن هذه النماذج تمثل حالات خاصة من التوليفة $\sum\psi_i\, \varepsilon_{t-i}$. ولعله من المفيد أن نلفت نظر القارئ إلى أن نظرية وولد قـد عممـت بواسـطة Cramer (1961) لتشمل العمليات غير الساكنة ولكن بمعاملات $\psi_j(t)$ تعتمد على الزمن.

2.1.4 اختبارات السكون المبدئية

هناك العديد من الطرق لاختبار سكون السلسلة، بعض هـذه الطـرق دقيقـة والبعض الآخر تقريبية. فإذا كانت السلسلة تتبع نموذج نظري معروف فإنـه يمكـن اختبار سكون السلسلة عن طريق حساب التوقع والتباين ودالة التغاير لهذه السلـسلة.

فإذا كان كل من التوقع والتباين لا يعتمد على الزمن واعتمدت دالة التغاير الذاتي على الفجوة الزمنية فقط بين كل متغيرين فإنه يمكن الحكم على سكون السلسلة كما في الأمثلة الآتية.

مثال (2):

إذا كانت السلسلة y_t تتبع النموذج الآتي

$$y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$$

حيث β_0 مقدار ثابت والمتغيرات $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ متغيرات عشوائية غير مرتبطة توقعها الصفر وتباينها مقدار ثابت σ^2 . هل السلسلة y_t ساكنة؟ اشرح سبب إجابتك

الحـــــل:

$$E(Y_t) = \beta_0 \quad , t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

أي أن التوقع لا يعتمد على الزمن

$$Var(Y_t) = V(\beta_0 + \varepsilon_t) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

أي أن التباين أيضًا لا يعتمد على الزمن t.

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(\beta_0 + \varepsilon_t, \beta_0 + \varepsilon_{t-k}) = 0, \; k = \pm 1, \pm 2, ...$$

أي أن جميع التغايرات الذاتية لا تعتمد على الزمن t

ومن ثم فإن السلسلة y_t ساكنة

مثال (3):

إذا كانت السلسلة y_t تتبع النموذج الآتي

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \quad , t = 1, 2, ..., n$$

حيث β_0 , β_1 ثابتان والعملية $\{\varepsilon_t\}$ عشوائية لها نفس الخصائص التي ذكـرت فـي المثال (1). هل السلسلة y_t ساكنة ؟ اشرح سبب إجابتك

الحـــــــل:

$$E(y_t) = \beta_0 + \beta_1 t \quad , t = 1, 2, ..., n$$

وهذا يعنى أن الوسط الحسابي للسلسلة y_t غير ساكن ويتزايد بمقدار ثابـت مطلق إذا كان $\beta_1 > 0$ ويتناقص بمقدار ثابت مطلق إذا كان $\beta_1 < 0$. أي أن السلسلة لها اتجاه عام خطي إذا كان $\beta_1 \neq 0$ ومن ثم فإن السلسلة y_t غير ساكنة. بـالطبع ليس هناك داع لاختبار سكون التباين والتغاير حيث إن أحد شـروط الـسكون غيـر متحقق.

مثال (4):

إذا كانت العملية العشوائية $\{y_t\}$ تتبع النموذج الآتي

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1, 2, ..., n$$

حيث $\{y_t\}$ عملية عشوائية لها نفس الخصائص التي ذكرت في الأمثلة السابقة. هـل العملية $\{y_t\}$ ساكنة؟ اشرح سبب إجابتك

الحـــــــل:

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) = E(Y_{t-1}) \quad , \quad t = 1, 2, ..., n$$

وبالتالي فإن التوقع ساكن لأنه لا يعتمد على الزمن

$$V(Y_t) = V(Y_{t-1}) + \sigma^2 + 2\,Cov(y_{t-1}, \varepsilon_t)$$

$$V(Y_t) = V(Y_{t-1}) + \sigma^2$$

وبالتالي فإن

$$V(Y_t) \neq V(Y_{t-1})$$

وبالتالي فإن التباين غير ساكن، وبالتالي فإن العملية $\{y_t\}$ غير ساكنة.

مثال(5):

إذا كانت العملية $\{y_t\}$ تتبع النموذج الآتي

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\,\varepsilon_{t-1} \quad ; \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

حيث θ مقدار ثابت و ε_t لها نفس الخصائص التي ذكرت في الأمثلة السابقة.

هل العملية $\{y_t\}$ ساكنة؟ اشرح سبب إجابتك

الحـــــل:

$$E(Y_t) = 0 \quad ; \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

أي أن التوقع ساكن لأي قيمة للثابت θ

$$V(Y_t) = V(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})$$

$$= V(\varepsilon_t) + \theta^2 V(\varepsilon_{t-1}) - 2\theta\,Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$$

$$V(Y_t) = \sigma^2 + \theta^2\ \sigma^2 = \sigma^2(1+\theta^2) \ ;\ t = 1, 2, \ldots$$

أي أن التباين ساكن لأي قيمة للثابت θ

$$\gamma(t, t+1) = Cov(Y_t, Y_{t+1})$$
$$= Cov(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t) = -\theta\sigma^2 \quad ; \quad t = 1, 2, \ldots$$

أي أن التغاير بين Y_{t+1}, Y_t لا يعتمد على t

بالمثل يمكن إثبات أن

$$\gamma(t,t+2) = \gamma(t,t+3) = \ldots = 0$$

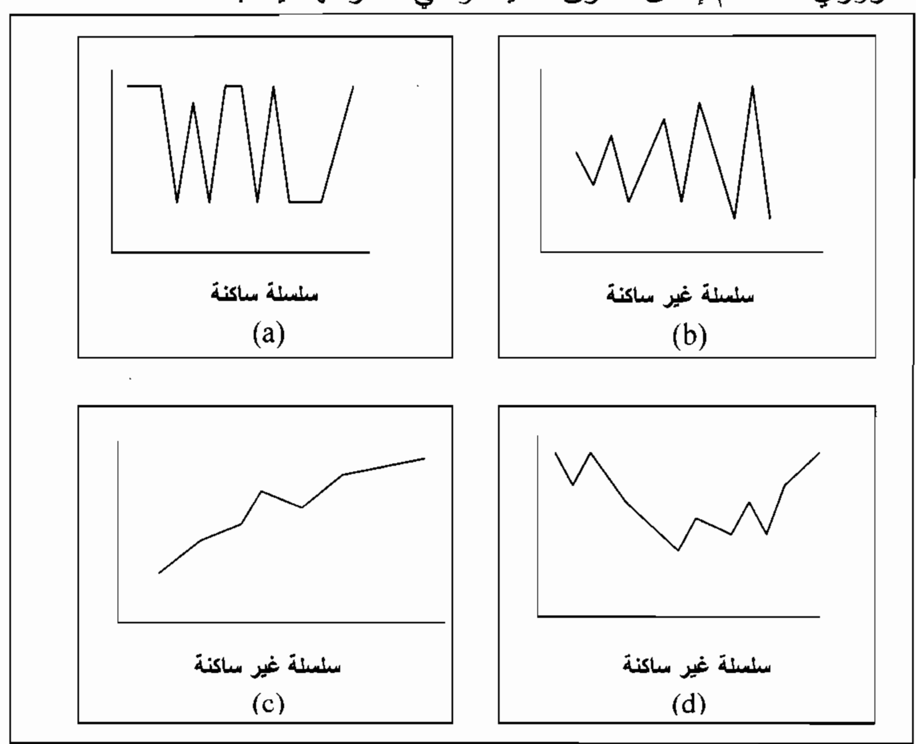
وبالتالي فإن

$$\gamma(t,t+k) = \gamma(k) = \begin{cases} -\theta\sigma^2, k = 1 \\ 0 \quad , k \geq 2 \end{cases}$$

أي أن دالة التغاير لا تعتمد على الزمن t وإنما تعتمد فقط على الفجوة الزمنية k وبالتالي فإن العملية y_t ساكنة.

أوضحت الأمثلة السابقة كيفية اختبار سكون عملية عشوائية تتبع نموذج معروف. ولكن في التطبيقات العملية غالباً ما يكون النموذج الإحصائي الذي يشرح ويفسر سلوك العملية التي ولدت البيانات المرصودة غير معروف، وفي مثل هذه المواقف يجب أن يمتلك الباحث الأدوات التي تمكنه من اختبار سكون مثل هذه العمليات. وفي الواقع أنه يوجد بعض الطرق الدقيقة لاختبار سكون السلسلة والتي سندرسها فيما بعد بالتفصيل وسنكتفي هنا بشرح بعض الطرق التقريبية وأهمها توقيع بيانات السلسلة المتاحة على الخريطة الزمنية، فإذا وجد أن قيم السلسلة تتأرجح بشكل ثابت حول خط وسط ثابت تقريباً فقد يكون هذا دليل تقريبي للاعتقاد بسكون السلسلة. أما إذا كان خط الوسط غير ثابت – أي أن السلسلة لها اتجاه عام– أو تشتت القيم حول خط الوسط غير ثابت فهذا دليل على عدم سكون السلسلة. ففي الشكل (1.a) يلاحظ أن البيانات تتأرجح بتباين ثابت حول خط وسط ثابت وبالتالي يمكن الحكم على سكون هذه السلسلة بشكل تقريبي، أما في الشكل(1.b) فبالرغم من أن السلسلة ليس لها اتجاه عام إلا أن تشتت البيانات يتزايد بزيادة الزمن وهذا دليل على عدم سكون هذه السلسلة،

في الشكل (1.c) السلسلة غير ساكنة لأن لها اتجاه خطي عام بالزيادة، وفي الشكل (1.d)السلسة أيضاً غير ساكنة لأن لها اتجاه عام من الدرجة الثانية. وتجدر الإشارة إلى أنه بالرغم من أهمية فحص التوقيع البياني للسلسلة الزمنية لفحص سكونها فإنه من الضروري استخدام إحدى الطرق الدقيقة والتي سندرسها فيما بعد



شكل(1): بعض السلاسل الزمنية الساكنة وغير الساكنة

يتضح من الأمثلة السابقة أن معظم الظواهر الاقتصادية والسكانية والطبيعية وغيرها هي سلاسل غير ساكنة لأن هذه الظواهر عادة ما تكون لها اتجاه محدد أو عشوائي. ولتحليل السلاسل الزمنية باستخدام منهجية بوكس وجينكنز لابد من تحويل السلاسل الزمنية غير الساكنة إلى سلاسل ساكنة باستخدام بعض التحويلات الرياضية والتي سندرسها فى المبحث الأخير من هذا الباب. وتعرف هذه العملية بتسكين السلسلة.

وقبل أن نختتم الحديث عن هذا المبحث قد يكون من المفيد أن نلقي الضوء على بعض العمليات العشوائية الهامة التي ذكرت في الأمثلة السابقة وتلعب دوراً هاماً في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية كما سنرى فيما بعد بالتفصيل. العملية الأولى $\{\varepsilon_t\}$ والتي ذكرت في جميع الأمثلة السابقة وتمثل متغيرات عشوائية غير مرتبطة توقعها الصفر وتباينها مقدار ثابت محدود يرمز له عادة بالرمز σ^2 وأحياناً بالرمز σ_ε^2. وتأخذ هذه العملية الخاصة أسماءً عديدة في العرف الإحصائي مثل العملية العشوائية البحتة Pure Random Process أو عملية الأخطاء الحقيقية True Error Process. أما الاسم الأكثر شيوعاً لهذه العملية خاصة في مجال السلاسل الزمنية فهو"الإضطرابات الهادئة" وهي الترجمة التي أرى أنها الأقرب للمصطلح العلمي"White Noise" والذي يستمد أصله من مجال الضوء والكهرباء. وتستخدم هذه العملية بكثرة في التطبيقات الاقتصادية والهندسية وغيرها، وهي من أهم مدخلات عمليات السلاسل الزمنية في جميع المجالات. أما العملية الثانية $\{y_t\}$ والتي ذكرت في المثال الخامس فتعرف بعملية المتوسطات المتحركة Moving Average Process، وهي من أهم عمليات السلاسل الزمنية – إن لم يكن أهمها على الإطلاق – والتي لها تطبيقات عديدة في الاقتصاد والهندسة والكيمياء وغيرها من مجالات المعرفة الأخرى. وتعتمد درجة تمهيد ونعومة هذه العملية على المقدار الثابت θ والذي يسمي بالمعلمة الرئيسية للنموذج. فإذا كانت $\theta < 0$ فإن العملية $\{y_t\}$ تكون أكثر نعومة من عملية "الإضطرابات الهادئة" $\{\varepsilon_t\}$، أما إذا كانت $\theta > 0$ فإن العملية $\{y_t\}$ تكون أقل نعومة من $\{\varepsilon_t\}$. أما العملية الثالثة $\{y_t\}$ والتي ذكرت في المثال الرابع فتعرف بعملية السير العشوائي Random Walk وهي حالة خاصة من عمليات الانحدار الذاتي Autoregressive Process والتي سندرسها فيما بعد بالتفصيل.

2.2 دالة الارتباط الذاتي Autocorrelation Function

تقيس دالة التغاير الذاتي $\gamma(s,t)$ -والتي سبق تعريفها في المبحث السابق- درجة الإعتماد الخطي بين أي متغيرين من المتغيرات التي تقع على نفس السلسلة الزمنية. فعلي سبيل المثال يقيس التغاير الذاتي $\gamma(1,2)$ درجة الاعتماد الخطي بين المتغير العشوائي Y_1 والذي يمثل قيمة السلسلة عند النقطة الزمنية الأولى والمتغير العشوائي Y_2 والذي يمثل قيمة السلسلة عند النقطة الزمنية الثانية، أى أن $\gamma(1,2)$ يمثل درجة الاعتماد الخطي بين كل القيم التي يمكن أن تولدها العملية العشوائية عند النقطة الزمنية الأولى وتلك القيم التي يمكن أن تولدها نفس العملية العشوائية عند النقطة الزمنية الثانية. وبصفة عامة فإن التغاير الذاتي $\gamma(s,t)$ هو دالة في الدليلين s, t .وتجدر الإشارة هنا إلى بعض الملاحظات الهامة والجديرة بالذكر أهمها.

1- إذا كان $\gamma(s,t)=0$ فهذا يعني أن المتغيرين Y_s, Y_t غير مرتبطين خطيًا ولكن قد يكون هناك ارتباط غير خطي بينهما.

2- إذا كان $\gamma(s,t)=0$ وكان المتغيران Y_s, Y_t لهما توزيع معتاد ثنائي Bivariate normal distribution فإن هذا بعني أن المتغيرين مستقلان.

3- يمكن اعتبار تباين العينة كحالة خاصة من دالة التغاير $\gamma(s,t)$ بوضع $s=t$ ، وهذا يعني أن $V(Y_t)=\gamma(t,t)$.

4- إذا كانت السلسلة ساكنة فإن دالة التغاير $\gamma(s,t)$ تكون دالة في الفجوة الزمنية $k=|s-t|$ فقط وتكتب عادة في هذه الحالة $\gamma(|s-t|)$ أو $\gamma(k)$

2.2.1 ماهية الارتباط الذاتي

من المعروف في علم الإحصاء أن استخدام التغاير لقياس درجة الاعتماد الخطي بين متغيرين يثير بعض المشاكل العملية، أولها عدم وجود حدود مرجعية (دنيا، عليا) يمكن الرجوع إليها لتحديد مدي قوة أو ضعف العلاقة الخطية، وثانيها أن

التغاير يعتمد على وحدات القياس المستخدمة. ومن ثم يفضل معايرة التغـايـر الـذاتي بالقسمة على حاصل ضرب الانحرافين المعياريين للمتغيرين Y_s, Y_t لنحصل على ما يعرف بالارتباط الذاتي (التسلسلي).

تعريف

يعرف معامل الارتباط الذاتي $\rho(s,t)$ بأنه معامل الارتبـاط الخطـي بـين المتغيرين Y_s, Y_t ويكتب على الصورة

$$\rho(s,t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_s).\mathrm{Var}(Y_t)}}.$$

$$= \frac{E(Y_s - \mu_s)(Y_t - \mu_t)}{\sqrt{E(Y_s - \mu_s)^2.E(Y_t - \mu_t)^2}} \quad ; \ s,t = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

وبالطبع – كما هو معروف في علم الإحصاء – يمكن حساب بسط معامل الارتباط من دالة الاحتمال الثنائية للمتغيرين Y_s, Y_t، بينما يحسب المقام مـن دالتـي الاحتمـال الهامشي للمتغيرين وذلك لكل قيم (s,t) المختلفة. وبالتالي ينشأ لدينا علاقة دالية بـين معاملات الارتباط الـذاتي والـزمنين (s,t) تـسمي بدالـة الارتبـاط الـذاتي(acf) autocorrelation function تقيس درجة الارتباط الخطي بين المتغيرات التـي تقـع على نفس السلسلة أو العملية العشوائية. وتتصف هذه الدالة بعدة خصائص أهمها

1. الارتباط الذاتي بين المتغير Y_t ونفسه يساوي الواحد، أي أن $\rho(t,t) = 1$
2. $\rho(t,s) = \rho(s,t)$ وذلك لأن $\gamma(t,s) = \gamma(s,t)$
3. قيمة $\rho(s,t)$ تقع دائماً على الفترة المغلقة $[-1,1]$
4. إذا كان $\rho(s,t) = 0$ فهذا يعني أنه لا توجد علاقة خطية بـين المتغيـرين Y_s, Y_t ولكن قد توجد علاقة غير خطية بينهما.

5. إذا كان $\rho(s,t) = \pm 1$ فهذا يعني أنه يوجد علاقة خطية تامة (طردية أو عكسية) بين المتغيرين Y_s, Y_t، أي أنه يمكن التنبؤ بأحد المتغيرين بالضبط باستخدام علاقة خطية يقوم فيها المتغير الآخر بدور المتغير المفسر regressor الوحيد في هذه العلاقة.

أما إذا كانت العملية العشوائية (السلسلة) ساكنة فإنه يمكن إعادة تعريف معامل الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي كما يلي

تعريف

يعرف معامل الارتباط الذاتي للعملية الساكنة $\{y_t\}$ عند الفجوة الزمنية k بأنه معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين Y_t, Y_{t-k} ويأخذ الصورة الآتية

$$\rho(k) = \frac{E(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)}{E(Y_t - \mu)^2}$$

$$= \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \quad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

حيث يرمز $\gamma(0)$ إلى تباين العملية الساكنة ويرمز $\gamma(k)$ إلى التغاير الذاتي عند الفجوة k لنفس العملية.

ومن ثم يمكن حساب معامل الارتباط الذاتي لكل فجوة من الفجوات الزمنية $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ فينشأ لدينا علاقة دالية بين معاملات الارتباط الذاتي $\rho(k)$ والفجوة الزمنية k تسمى بدالة الارتباط الذاتي للعملية الساكنة $\{y_t\}$ تقيس الارتباط الخطي بين المتغيرات على نفس السلسلة الزمنية والتي تبعد عن بعضها البعض فجوة زمنية مقدارها k. فعلى سبيل المثال يقيس $\rho(1)$ درجة الارتباط الخطي بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما يساوي الوحدة أي درجة الارتباط بين Y_2, Y_1، أو بين Y_{11}, Y_{10} أو ... أو بصفة عامة الارتباط الخطي بين Y_t, Y_{t-1}، ويقيس $\rho(3)$ درجة الارتباط الخطي بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما يساوي ثلاث وحدات أي

درجة الارتباط الخطي بين Y_4, Y_1 أو بين Y_{14}, Y_{10} أو .... أو بصفة عامة درجة الارتباط الخطي بين Y_t, Y_{t-3}. وتعرض دالة الارتباط الذاتي في شكل رياضي أو جدولي أو بياني كما سنرى فيما بعد.

تعريف

تعرف مصفوفة الارتباط الذاتي للعملية العشوائية الساكنة التي تتكون من عدد n من المتغيرات في الصورة الآتية

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(n-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(n-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \cdots & \rho(n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho(n-1) & \rho(n-2) & \rho(n-3) & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

2.2.2 خصائص وأهمية دالة الارتباط الذاتي

تتصف دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ لأي عملية ساكنة بعده خصائص هامة نذكر منها ما يلي:

1. معامل الارتباط الذاتي عند الفجوة الزمنية صفر يساوي الواحد، أي أن $\rho(0) = 1$ لأي عملية ساكنة

2. قيمة $\rho(k)$ تقع دائماً على الفترة المغلقة $[-1,1]$

3. إذا كان $\rho(k) = 0$ فهذا يعني أنه لا توجد علاقة خطية بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما k وحدة، ولكن بالطبع قد توجد علاقة غير خطية بينهما.

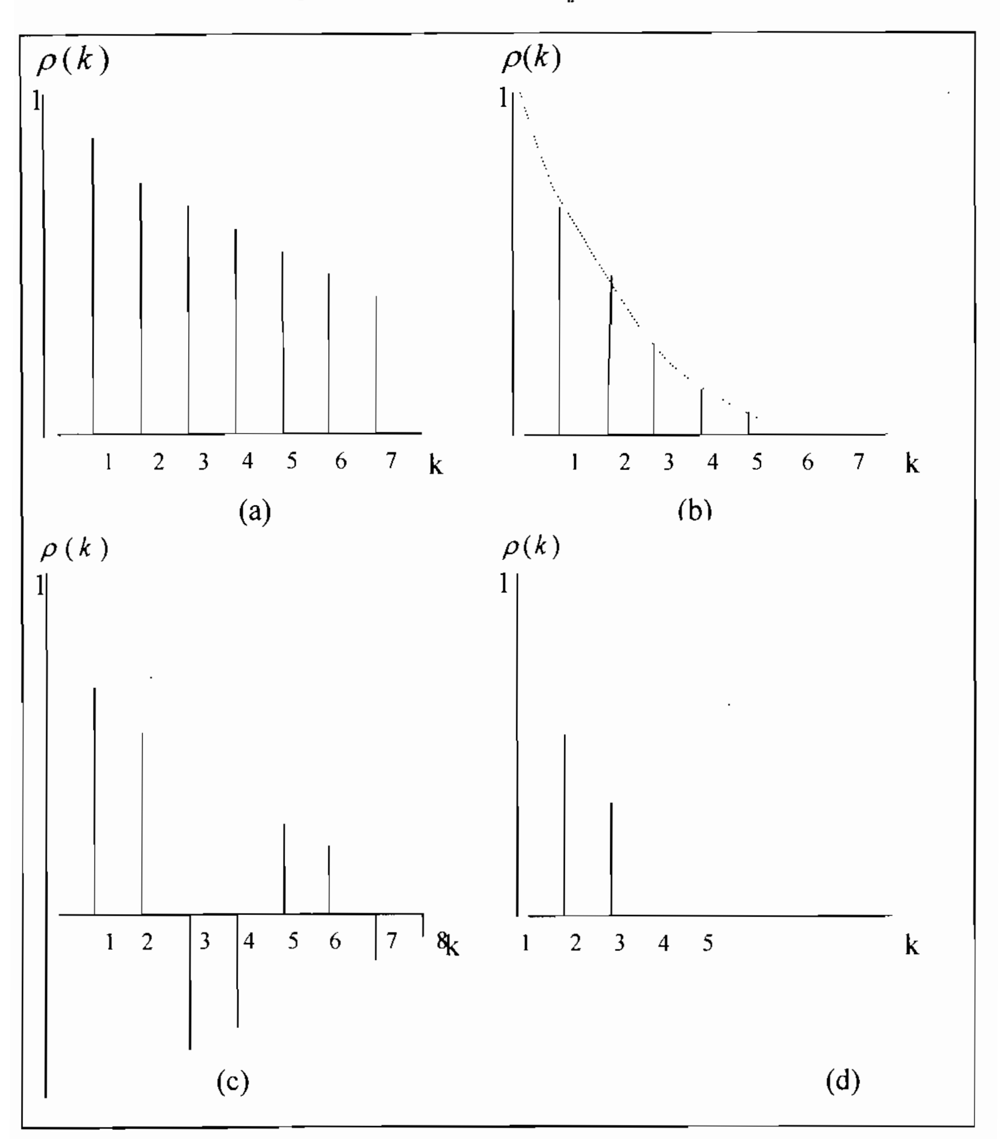
4. إذا كان $\rho(k) = \pm 1$ فهذا يعني أنه توجد علاقة خطية تامة بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما k وحده، أي أنه يمكن التنبؤ بأحدهما بالضبط باستخدام علاقة خطية يقوم فيها المتغير الآخر بدور المتغير المفسر الوحيد في هذه العلاقة.

5. الدالة $\rho(k)$ دالة متماثلة دائماً حول الفجوة $k = 0$، أي أن $\rho(-k) = \rho(k)$. ولذلك عادة ما يكتفي برسم هذه الدالة لقيم k الموجبة فقط كما سنري فيما بعد في الأمثلة.

6. مصفوفة الارتباط دائماً موجبة تامة Positive definite، ولذلك تــرتبط معــاملات الارتباط المختلفة $\rho(0), \rho(1), \rho(2),...$ فيما بينهما بعلاقات جبرية يمكن استنتاجها من العلاقة بين المصفوفة تامة الإيجاب والمحددات الرئيسية كما هو الحــال فــي مصفوفة التغاير والتباين في نظرية الإحصاء، انظر تمرين (8).

وتأخذ الدالة $\rho(k)$ في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية أشكالاً متعددة، فتارة تجدها تتلاشى ببطء ، وتارة تجدها تتلاشى بسرعة في صــورة أســية exponential fashion ، وتارة ثالثة تقترب تدريجياً من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب sinewaves، وتارة رابعة تقترب تدريجياً من الصفر فى شكل توليفــة مــن الــدوال الأسية، وتارة خامسة تنقطع كلية فجأة بعد عدد معين من الفجوات الزمنية. ففي شكل (2.a) تتناقص $\rho(k)$ ببطء، وتتناقص برتابة وبسرعة وفي صورة أسية فــي شــكل (2.b)، وتقترب تدريجياً من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب فــي شــكل (2.c)، بينما تنقطع كلية فجأة بعد الفجوة الزمنية الثانية في شكل (2.d)

وتلعب دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ دورا هاما وخطيرا – إن لم يكن أهــم دور على الإطلاق– في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية بطريقة بوكس وجينكنــز. فهــي الأداة الرئيسية التي ارتضاها هذان العالمان لاختبار سكون السلسلة – بجانب الطــرق التقريبية الأخرى– وهي أحد الأدوات الرئيسية للتعرف على النموذج المبدئي الملائــم للسلسلة. بالإضافة إلى ذلك فإن هذه الدالة من أهم أدوات تشخيص النموذج المبدئي من أجل تحسينه أو تطويره إذا ما طبقت على البواقي Residuals الناتجة من هذا النموذج. وسنتعرض للدور الذي تلعبه دالة الارتباط الذاتي بالتفصيل عند تقديم منهجية بــوكس وجينكنز في الباب الرابع.



شكل (2): بعض أشكال دوال الارتباط الذاتي المشهورة

والأمثلة الآتية توضح كيفية إيجاد دالة الارتباط الذاتي لبعض العمليات العشوائية والنماذج ذات الاتجاه المحدد (غير العشوائي).

مثال(6):

أوجد دالة الارتباط الذاتي لعملية "الاضطرابات الهادئة" $\{\varepsilon_t\}$

الحــــــل:

حيث إن عملية $\{\varepsilon_t\}$ "اضطرابات هادئة" فإن:

$$E\ (\varepsilon_t) = 0\ ;\ t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$V\ (\varepsilon_t) = \sigma^2; t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad ;$$

$$\gamma\ (k) = Cov\,(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0\ \ ;\ \ k \neq 0\ ; t = 0,\ \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad ;$$

وبالتالي فإن

$$\rho\,(k) = \frac{\gamma\,(k)}{\gamma\,(0)} = 0\ \ ,\ \ \ k \neq 0$$

أي أن

$$\rho\,(k) = \begin{cases} 1 & ,\ k = 0 \\ 0 & ,\ k \neq 0 \end{cases}$$

مثال(7):

إذا كانت السلسلة y_t تتبع النمــوذج $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ حيــث ε_t عمليــة "اضطرابات هادئة"، أوجد دالة الارتباط الذاتي للسلسلة y_t

الحــــــل:

$$V(Y_t) = V(\beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

وذلك لأن الدالة $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t$ هــي دالــة محــددة (غيــر عــشوائية) Deterministic أي غير عشوائية.

$$\gamma(s, t) = Cov\,(\beta_0 + \beta_1 s + \varepsilon_s, \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t) = 0\ \ , s \neq t$$

ومن ثم فإن

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & , \quad k = 0 \\ 0 & , \quad k \neq 0 \end{cases}$$

وتجدر الإشارة هنا إلى حقيقة في غاية الأهمية وهي أن دالة الارتباط الذاتي لهذا النموذج تساوي الصفر بدءا من الفجوة الزمنية الأولى، أي أن هناك انقطاع تام لهذه الدالة على الرغم من عدم سكون هذه السلسلة حيث إن لها اتجاه عام خطي بالزيادة أو النقصان على عكس ما قد نرى في الفصول القادمة عند التعامل مع نماذج ARIMA. وفي الواقع أنه لا يوجد تعارض بالمرة كما سنرى في الفصول القادمة حيث إن النموذج y_t في هذا المثال الذي بين أيدينا ليس عشوائياً nonstochastic بل هو نموذج محدد Deterministic كما أوضحنا سابقاً في الباب الأول، وبالتالي فعدم وجود ارتباط ذاتي بين مشاهدات السلسلة يبدو أمراً منطقياً. وقد ذكرنا هذا النموذج في هذا الباب لأنه عادة ما يحدث لبس للطالب أو الباحث الذي ليس لديه الخبرة والدراية الكافية بموضوعات النماذج المحددة والعشوائية وعلاقتها بالسكون وعلاقة هذا بالأخير بدالة الارتباط الذاتي. وبالطبع ما يقال عن النموذج y_t في هذا المثال يقال عن كل النماذج المحددة.

مثال(8):

أوجد دالة الارتباط الذاتي للعملية $\{y_t\}$ في المثال(5)

الحـــــل:

عند حل هذا المثال وجدنا أن

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) & , \quad k = 0 \\ -\theta\sigma^2 & , \quad k = 1 \\ 0 & , \quad k \geq 2 \end{cases}$$

وبالتالي فإن

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & ; \quad k = 0 \\ -\dfrac{\theta}{1+\theta^2} & ; \quad k = 1 \\ 0 & ; \quad k \geq 2 \end{cases}$$

2.2.3 تقدير دالة الارتباط الذاتي

أوضحنا سابقاً أهمية وضع شروط السكون على العملية العشوائية التي ولدت السلسلة المرصودة (المتاحة) وأهمها تخفيض عدد المعالم الرئيسية (عــزوم الدرجــة الأولي والثانية) وسهولة تفسيرها وإمكانية تقديرها باستخدام مشاهدات السلسلة المتاحة $y_1, y_2, \dots, y_n$ وبناء على هذه التقديرات يمكن تقدير دالة الارتباط الــذاتي للعمليــة العشوائية الساكنة بأحد التقديرين الآتيين

$$r(k) = \hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}$$

$$r_0(k) = \tilde{\rho}(k) = \frac{\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}$$

وفي الحقيقة أن هذين التقديرين متحيزان biased، ولذلك فليس هنــاك أيــة أفــضلية لإحداهما على الآخر، وعادة ما يستخدم التقدير الأول r(k) لتقدير دالة الارتباط الذاتي، وهذا التقدير هو الذي سنستخدمه بالفعل في هذا الكتاب. ويمكن إثبات أنــه إذا كانــت العملية العشوائية $\{y_t\}$ ساكنة وخطية وأن العزم الرابع $E(Y_t^4)$ محدود فإن تقدير دالة الارتباط الذاتي r(k) يتبع تقاربياً (إذا كانت n كبيرة) توزيع معتاد(معتــدل) Normal متوسطه ρ(k) وله تباين معين معروف يعتمد على ρ(k) أيضاً. ومن ثم يمكن إجراء الاختبارات الإحصائية الخاصة بمعنوية significance الارتباطات الذاتية المختلفــة.

والحالة الخاصة الهامة إذا كانت العملية العشوائية موضع الدراسة عملية "اضطرابات هادئة" فإن تباين $r(k)$ يأخذ الصورة البسيطة الآتية:

$$V[r(k)] \approx \frac{1}{n}$$

ومن ثم يمكن اختبار معنوية الارتباط الذاتي في هذه الحالة بشكل تقريبي كنا سنري عند تشخيص نماذج ARIMA في الباب الرابع. والمثال الأتي يوضح كيفية حساب معاملات الارتباط الذاتي

مثال(9):

تمثل البيانات الآتية عدد الوحدات المباعة بالمائة سنوياً من إحدى السلع في أحد المحلات الكبرى

السنة	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
عدد الوحدات بالمائة	1	3	2	4	3	2	3	2

احسب معاملات الارتباط الذاتي وارسم دالة الارتباط المقدرة

الحـــــل:

$$\bar{y} = \frac{20}{8} = 2.5 \quad ; \quad \sum_{t=1}^{8}(y_t - \bar{y})^2 = 6$$

$$r(1) = \frac{\sum_{t=1}^{7}(y_t - \bar{y})(y_{t+1} - \bar{y})}{6}$$

$$r(1) = \frac{1}{6}[(y_1 - \bar{y})(y_2 - \bar{y}) + (y_2 - \bar{y})(y_3 - \bar{y}) + (y_3 - \bar{y})(y_4 - \bar{y})$$

$$+ (y_4 - \bar{y})(y_5 - \bar{y}) + (y_5 - \bar{y})(y_6 - \bar{y}) + (y_6 - \bar{y})(y_7 - \bar{y})$$

$$+ (y_7 - \bar{y})(y_8 - \bar{y})] = -0.29$$

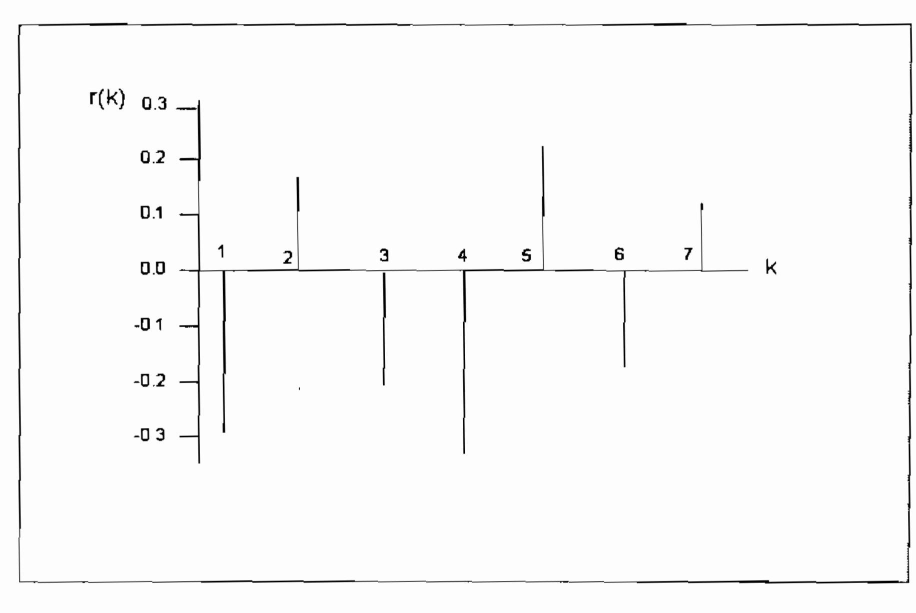
$$r(2) = \frac{1}{6}[(y_1 - \bar{y})(y_3 - \bar{y}) + (y_2 - \bar{y})(y_4 - \bar{y}) + (y_3 - \bar{y})(y_5 - \bar{y})$$

$$+ (y_4 - \bar{y})(y_6 - \bar{y}) + (y_5 - \bar{y})(y_7 - \bar{y}) + (y_6 - \bar{y})(y_8 - \bar{y})] = 0.17$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$r(3) = -0.21$; $r(4) = -0.33$; $r(5) = 0.21$; $r(6) = -0.17$; $r(7) = 0.13$

ومنه يمكن عرض دالة الارتباط الذاتي المقدرة في الشكل(3)



شكل (3): دالة الارتباط الذاتي للمثال (9)

مثال(10):

تمثل البيانات الآتية متوسط النسبة المئوية السنوية للرطوبة في إحدى المدن

السنة	1990	1991	1992	1993	1994
عدد الوحدات بالمائة	20	30	10	20	20

ارسم دالة الارتباط الذاتي لهذه البيانات.

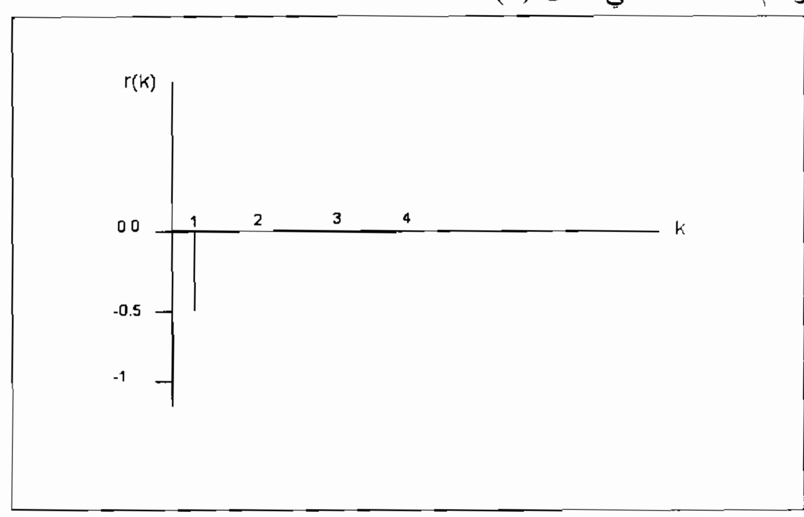
الحـــــل:

$$\bar{y} = \frac{100}{58} = 20 \quad ; \quad \sum_{t=1}^{5}(y_t - \bar{y})^2 = 200$$

يمكن بسهولة إثبات أن

$$r(1) = -\frac{1}{2} \quad ; \quad r(2) = r(3) = r(4) = 0$$

ويمكن رسم هذه الدالة في شكل (4)



شكل(4): دالة الارتباط الذاتي للمثال (10)

ويلاحظ أن $r(k)$ تنقطع فجأة بعد الفجوة الزمنية الأولى.

2.3 دالة الارتباط الذاتي الجزئي Partial Autocorrelation Function

تلعب دالة الارتباط الذاتي الجزئي دوراً لا يقل أهمية عن دور دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ – والتي سبق تقديمها في المبحث السابق– في التعرف على النموذج الملائم للبيانات الزمنية المرصودة في منهجية بوكس وجينكنز وقبل تعريف هذه الدالة ودراسة خصائصها في السلاسل الزمنية قد يكون من الأفضل أن نستهل هذا المبحث بمقدمة عن مفهوم الارتباط الجزئي بصفة عامة في مجالات الإنحدار المألوفة لدى القارئ ثم ننتقل إلى تعميم هذا المفهوم في مجالات السلاسل الزمنية ودراسة خصائص دالة الارتباط الذاتي الجزئي وأهم طرق تقديرها باستخدام بيانات سلسلة زمنية متاحة.

2.3.1 مقدمة

افترض أن X,Z,W ثلاثة متغيرات عشوائية لهم دالة كثافة احتمال مشترك $f(x,z,w)$. من المعروف في موضوعات الإحصاء بصفة عامة – وفي موضوعات الانحدار بصفة خاصة– أن معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين X,Z يعرف في الصورة

$$\rho(X,Z)=\rho_{X,Z}=\frac{\text{Cov}(X,Z)}{\sqrt{\text{Var}(X).\text{Var}(Z)}}$$

ويقيس المعامل $\rho_{X,Z}$ درجة الاعتماد الخطي(الكلي) بين المتغيرين X,Z أي قوة الارتباط الخطي بينهما إذا كانت العلاقة بينهما على الشكل التالي (بافتراض أن X هو المتغير التابع)

$$E(X\mid Z)=\beta_0+\beta_1 Z$$

ويمثل بسط معامل الارتباط الخطي التغاير بين المتغيرين والذي يمكن الحصول عليه من دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X,Z وذلك بإيجاد $E(X-\mu_X)(Z-\mu_Z)$ ، بينما يمثل المقام الجذر التربيعي لحاصل ضرب تباين المتغيرين. ويمكن الحصول على تباين المتغير X بإيجاد $E(X-\mu_x)^2$ باستخدام دالة كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير X، بينما يمكن الحصول على تباين المتغير Z بإيجاد $E(Z-\mu_z)^2$ باستخدام دالة كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير Z. إذا كان $\rho_{X,Z} > 0$ فإن هذا يعني أن القيم الكبرى للمتغيرين تميل أن تحدث معاً، كما أن القيم الصغرى لهما تميل أيضاً أن تحدث معاً. أما إذا كان $\rho_{X,Z} < 0$ فإن هذا يعني أن القيم الكبرى لأحد المتغيرين تميل أن تحدث مع القيم الصغرى للمتغير الآخر.

ولكن من جهة أخرى قد يكون هناك علاقة بين كل من المتغيرين X,Z بالمتغير الأخر W، وفي هذه الحالة فإن $\rho_{X,Z}$ لا يعبر عن صافي العلاقة بين المتغيرين X,Z وإنما تعتمد قيمة هذا المعامل - بالإضافة إلى العلاقة بين X,Z - إلى مدى ارتباط كل من هذين المتغيرين بالمتغير الثالث W. فتغير المتغير الثالث W يساهم في تغير كل من المتغيرين X,Z ومن ثم يتأثر معامل الارتباط $\rho_{X,Z}$ بهذا التغير. وفي كثير من الأحيان قد يكون من المرغوب فيه البحث في صافي العلاقة بين المتغيرين X,Z بعد حذف تأثير المتغير W على هذين المتغيرين أي بافتراض ثبات المتغير W. ولإيجاد مثل هذا الارتباط - والذي يرمز له عادة بالرمز $\rho_{X,Z.W}$ - يجب أولاً إيجاد التوزيع الشرطي $f(x,z\,|\,w)$ واستخدام هذا التوزيع لإيجاد معامل الارتباط الشرطي.

$$\rho_{X,Z.W} = \frac{\text{Cov}(X,Z\,|\,W)}{\sqrt{\text{Var}(X\,|\,W).\text{Var}(Z\,|\,W)}}$$

$$= \frac{E[X-E(X\,|\,W)]\;[Z-E(Z\,|\,W)]}{\sqrt{E[X-E(X\,|\,W)]^2\;.\;E[Z-E(Z\,|\,W)]^2}}$$

والسبب في اقتراح الصيغة السابقة لقياس الارتباط الجزئي بين المتغيرين X,Z يعــود إلى أن المتغير العشوائي [X-E(X|W)] يمثل المتغير العشوائي X بعد حــذف تــأثير المتغيرW، كما أن المتغير العشوائي [Z-E(Z|W)] يمثل المتغير العشوائيZ بعد حذف تأثير المتغيرW. ومن ثم فإن معامل الارتباط بين المتغير[X-E(X|W)] والمتغيــر[Z-E(Z|W)] –والمعرف بالصيغة السابقة– يكون اقتراح منطقي لقياس درجة الارتبــاط الجزئي بين المتغيرين X,Z بعد حذف تأثير المتغيرW.

نظرية (1)

إذا كانــت المتغيــرات العــشوائية X,Z,W تتبــع توزيــع معتــاد ثلاثــي trivariate normal distribution فإن

$$\rho_{X,Z.W}=\frac{\rho_{X,Z}-(\rho_{X,W})(\rho_{Z,W})}{\sqrt{(1-\rho^{2}_{X,W})(1-\rho^{2}_{Z,W})}}$$

ولن نتعرض لإثبات هذه النظرية هنا لأننا سنثبت الوجه الآخر لهذه النظرية في مجال السلاسل الزمنية في المبحث التالي.

2.3.2 ماهية الارتباط الذاتي الجزئي

في موضوعات السلاسل الزمنية تحظى دراسة معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية الثانية بأهمية خاصة حيث يقيس هذا المعامــل درجــة الارتبــاط الخطي بين متغيرين يبعدان عن بعضهما البعض وحدتان زمنيتان بعد حــذف تــأثير المتغير الذي يقع بينهما أي بافتراض ثبات هذا المتغير. فهذا المعامل يقيس قوة العلاقة الخطية بين المتغيرين Y_3, Y_1 بعد حذف تأثير المتغير Y_2، ويقيس قوة العلاقة الخطية بين المتغيرين Y_4, Y_2 بعد حذف تأثير المتغير Y_3، ... وهكذا. وبصفة عامة يقــيس

هذا المعامل قوة الارتباط الخطي بين المتغيرين Y_t, Y_{t-2} بعد حذف تأثير المتغير الذي يقع بينهما وهو Y_{t-1} أي بافتراض ثبات هذا المتغير. ويرمز لهذا المعامل عادة بالرمز ϕ_{22} ويمكن تفسيره على أنه معامل الارتباط الخطي بـــين المتغيـــر $[Y_t-E(Y_t|Y_{t-1})]$ والمتغير $[Y_{t-2} - E(Y_{t-2}|Y_{t-1})]$، ويمكن حسابه باستخدام دالتي الاحتمال الشرطي $f(y_t, y_{t-2}|y_{t-1})$ و $f(y_t|y_{t-1})$

نظرية (2):

إذا كانت العملية $\{y_t\}$ ساكنة وكانت المتغيرات Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2} تتبـــع توزيعـــاً معتاداً(معتدلاً) ثلاثياً فــــــــإن:

$$\phi_{22} = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}$$

البرهان:

حيث إن المتغيرات الثلاثة تتبع توزيع معتاد متعدد فإن

$$E(Y_{t-2} | Y_{t-1}) = \mu + \rho(1)[Y_{t-1} - \mu] \qquad (1)$$

$$E(Y_t | Y_{t-1}) = \mu + \rho(1)[Y_{t-1} - \mu] \qquad (2)$$

$$Var(Y_{t-2} | Y_{t-1}) = \sigma^2[1 - \rho^2(1)] \qquad (3)$$

$$Var(Y_t | Y_{t-1}) = \sigma^2[1 - \rho^2(1)] \qquad (4)$$

$$\phi_{22} = Corr\{[Y_t - E(Y_t | Y_{t-1})] \; , \; [Y_{t-2} - E(Y_{t-2} | Y_{t-1})]\}$$

$$= \frac{E[Y_t - E(Y_t | Y_{t-1})] \;\; [Y_{t-2} - E(Y_{t-2} | Y_{t-1})]}{\sqrt{Var(Y_t | Y_{t-1}) \; . \; E(Y_{t-2} | Y_{t-1})}} \qquad (5)$$

بالتعويض من (1) و (2) في بسط المعامل ϕ_{22} نصل إلى

البسط $= E[Y_t - \mu - \rho(1)(Y_{t-2} - \mu)]\ [Y_{t-2} - \mu - \rho(1)(Y_{t-1} - \mu)]$

$$= E[Y_t - \mu][Y_{t-2} - \mu] - \rho(1)\,E(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)$$

$$-\rho(1)\,E(Y_{t-1} - \mu)(Y_{t-2} - \mu) + \rho^2(1)\,E(Y_t - \mu)^2$$

$$= \gamma(2) - \rho(1)\gamma(1) - \rho(1)\gamma(1) + \frac{\rho(1)\gamma(0)\ \gamma(1)}{\gamma(0)}$$

$$= \gamma(2) - \rho(1)\gamma(1) \qquad (6)$$

بالتعويض من (1) و (2) في مقام المعامل ϕ_{22} في المعادلة (5) نصل إلى

المقام $= \gamma(0)[1 - \rho^2(1)]$ (7)

بقسمة (6) على (7) نصل إلى

$$\phi_{22} = \frac{[\gamma(2) - \rho(1)\gamma(1)]}{\gamma(0)[1 - \rho^2(1)]}$$

$$= \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}$$

وهو المطلوب إثباته

وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن بسهولة إثبات النظرية (2) بالتعويض عن النظرية (1) مباشرة وذلك بوضع

$$Y_{t-2} = X\ ;\ \ Y_t = Z\ ;\ \ Y_{t-1} = W$$

تعريف:

يعرف معامل الارتباط الجزئي للعملية الساكنة $\{y_t\}$ عند الفجوة الزمنية k بأنه معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين Y_t, Y_{t-k} بعد حذف تأثير المتغيرات التي تقع بينهما وهى $Y_{t-1}, Y_{t-2}, ... Y_{t-k+1}$.

ويرمز عادة لمعامل الارتباط الجزئي عند الفجوة k بالرمز ϕ_{kk} ويمكن تفسيره على أنه معامل الارتباط الخطي بين المتغير $[Y_t - E(Y_t \mid (Y_{t-1}, Y_{t-2}, ... Y_{t-k+1})]$ والمتغير $[Y_{t-k} - E(Y_{t-k} \mid Y_{t-1}, Y_{t-2}, ... Y_{t-k+1})]$. ويمكن حساب معامل الارتباط الذاتي باستخدام دوال الاحتمال الشرطي المناسبة لجميع قيم k =1, 2,....

تعريف:

تعرف دالة الارتباط الذاتي الجزئي بأنها علاقة دالية بين معاملات الارتباط الجزئي ϕ_{kk} والفجوة الزمنية k.

وتعرض دالة الارتباط الجزئي – شأنها في ذلك شأن دالة الارتباط الذاتي – عادة في شكل رياضي وأحيانًا في شكل جدولي أو بياني.

2.3.3 خصائص دالة الارتباط الذاتي الجزئي

تتصف دالة الارتباط بعدة خصائص هامة نذكر منها ما يلي:

1. معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية صفر يساوي واحد، أي أن $\phi_{00} = 1$ لأي عملية ساكنة
2. قيمة ϕ_{kk} تقع دائمًا على الفترة المغلقة [1 ,1-]

3. معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية الأولي دائمًا يساوي معامل الارتباط الذاتي عند الفجوة الزمنية الأولى، أي أن $\phi_{11} = \rho(1)$ وذلك لعدم وجود متغيرات بين المتغيرين Y_t, Y_{t-1}.

4. إذا كان $\phi_{kk} = 0$ فهذا يعني أنه لا توجد علاقة خطية جزئية بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما k وحدة، ولكن بالطبع قد توجد علاقة جزئية غير خطية بينهما.

وتأخذ الدالة ϕ_{kk} في التحليل الحديث أشكالاً قريبة الشبه من أشكال دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ ، فتارة تتلاشى ببطء، وتارة تتلاشي بسرعة في صورة أسية وتارة تقترب تدريجيًا من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب أو في شكل توليفة من الدوال الأسية، وتارة تنقطع كلية بعد عدد معين من الفجوات الزمنية. وتلعب دالة الارتباط الذاتي الجزئي دورًا لا يقل أهمية عن دور دالة الارتباط الذاتي، فتستخدم لاختبار سكون السلسلة بجانب الطرق الأخرى، وهى أحد الأدوات الرئيسية التي وظفت بواسطة بوكس وجينكنز للتعرف على النموذج المبدئي وتشخيص هذا النموذج من أجل تحسينه أو تطويره. وسنتعرض للدور الذي تلعبه هذه الدالة بالتفصيل عند تقديم منهجية بوكس وجينكنز في الباب الرابع.

2.3.4 تقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي

قدم الفكر الخاص بالسلاسل الزمنية أساليب عديدة لتقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي ويعتبر أسلوب أو نظام يوول - والكر من أهم هذه الأساليب على الإطلاق. ونظرًا لأهمية هذا النظام والدور الهام الذي يلعبه في منهجية بوكس وجينكنز فقد خصصنا المبحث القادم بالكامل لعرض هذا النظام بالتفصيل، بينما نقدم في هذا المبحث أسلوبين آخرين لتقدير الارتباط الذاتي الجزئي.

الأسلوب الأول

لدراسة الارتباط الجزئي بين المتغيرين Y_t , Y_{t-k} يفترض هذا الأسلوب أن علاقة الانحدار بين المتغير Y_{t-k} والمتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_t على الصورة الخطية الآتية.

$$Y_{t-k} = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-k+1} + \beta_2 Y_{t-k+2} + \ldots + \beta_{k-1} Y_{t-1} + \varepsilon_{t-k} \ ; \ k = 2, 3, \ldots, n-1$$

(2.3.1)

وبالتالي فإن المتغير العشوائي

$$\varepsilon_{t-k} = Y_{t-k} - (\beta_0 + \beta_1 Y_{t-k+1} + \beta_2 Y_{t-k+2} + \ldots + \beta_{k-1} Y_{t-1})$$

يمثل المتغير Y_{t-k} بعد حذف تأثير المتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_t . وبالمثل يفترض هذا الأسلوب أن علاقة الانحدار بين المتغير Y_t والمتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_{t-k} على الصورة الخطية

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-k+1} + \alpha_2 Y_{t-k+2} + \ldots + \alpha_{k-1} Y_{t-1} + e_t \ ; k = 2, 3, \ldots, n-1$$

(2.3.2)

ومن ثم فإن المتغير العشوائي

$$e_t = Y_t - (\alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-k+1} + \alpha_1 Y_{t-k+2} + \ldots + \alpha_{k-1} Y_{t-1})$$

يمثل المتغير Y_t بعد حذف المتغيرات التي تقع بينه وبين المتغير Y_{t-k} . وبناءً على ذلك يمكن تقدير ϕ_{kk} عن طريق إجراء الخطوات الآتية

1. نضع k=2 ونجري الانحدار (2.3.1) ونحصل منه على البواقي $\hat{\varepsilon}_t$ ، ثم نجري الانحدار (2.3.2) ونحصل منه على البواقي $\hat{e}_t$.

2. نحسب معامل بيرسون للارتباط الخطي بين قيم القيم $\hat{\varepsilon}_t$ والقيم $\hat{e}_t$. هذا المعامل يعطي تقدير مناسب لمعامل الارتباط الجزئي ϕ_{22} ، ويرمز له عادة بالرمز $\hat{\phi}_{22}$.

3. نضع $k = 3$ ونكرر الخطوتين السابقتين ونحصل على تقدير لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{33} وليكن $\hat{\phi}_{33}$.

4. نكرر الخطوتين 2,1 لجميع القيم الأخرى للفجوة الزمنية k، وبالتالي يمكن الحصول على التقديرات $\hat{\phi}_{22}, \hat{\phi}_{33}, ..$.

الأسلوب الثاني

بالرغم من سهولة الأسلوب الأول، إلا إنه يحتاج إلى توفيق معادلتين انحدار مختلفتين لتقدير كل معامل. ومن ثم لا بد من توفيق عدد من معادلات الانحدار يساوي ضعف عدد معاملات الارتباط الذاتي الجزئي المطلوب تقديرها. الأسلوب الثاني يوفر نصف هذا العدد وذلك بتوفيق مجموعة معادلات الانحدارات الآتية والحصول على آخر تقدير في كل معادلة ليمثل التقدير المطلوب.

1. $y_t = \phi_{11} y_{t-1} + \varepsilon_t$

2. $y_t = \phi_{21} y_{t-1} + \phi_{22} y_{t-2} + \varepsilon_t$

3. $y_t = \phi_{31} y_{t-1} + \phi_{32} y_{t-2} + \phi_{33} y_{t-3} + \varepsilon_t$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

k. $y_t = \phi_{k1} y_{t-1} + \phi_{k2} y_{t-2} + \cdots + \phi_{kk} y_{t-k} + \varepsilon_t$

وقبل أن نختتم هذا المبحث تجدر الإشارة بالقول بأنه قد لا يكون هناك داع لتقدير المعامل ϕ_{11} بشكل مستقل حيث إن هذا المعامل يساوي بالتعريف معامل الارتباط الذاتي $\rho(1)$، لأنه ليس هناك أي متغيرات تقع بين Y_t, Y_{t-1} ، ومن ثم يمكن تقدير ϕ_{11} كما يلي:

$$\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}(1) = r(1)$$

وقد سبق تعريف $r(1)$ في المبحث السابق.

2.3.5 نظام (معادلات) يوول - والكر Yule- Walker System

بصفة عامة – بافتراض السكون بالطبع – يمكن تعريف معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية k أي ϕ_{kk} بأنه معامل y_{t-k} في نموذج الانحدار.

$$y_t = \phi_{k1} Y_{t-1} + \phi_{k2} Y_{t-2} + \ldots + \phi_{kk} Y_{t-k} + \varepsilon_t \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (2.3$$

ومن ثم فإن دالة التغاير الذاتي لهذا النموذج هي

$$\gamma(j) = \mathrm{Cov}\,(Y_{t-j}, Y_t) = E(Y_{t-j} Y_t)$$

$$\gamma(j) = E[Y_{t-j}(\phi_{k1} Y_{t-1} + \phi_{k2} Y_{t-2} + \ldots + \phi_{kk} Y_{t-k} + \varepsilon_t)]$$

$$\gamma(j) = \phi_{k1}\gamma(j-1) + \phi_{k2}\gamma(j-2) + \ldots + \phi_{kk}\gamma(j-k) \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

بقسمة $\gamma(j)$ على التباين $\gamma(0)$ نصل إلى دالة الارتباط الذاتي للنموذج (2.3.3) على الصورة

$$\rho(j) = \phi_{k1}\rho(j-1) + \phi_{k2}\rho(j-2) + \ldots + \phi_{kk}\rho(j-k) \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, k \qquad (2.3.4)$$

يعرف النظام (2.3.4) بنظام يوول والكر ويتكون من k معادلة خطية في المجاهيل $\phi_{k1}, \phi_{k2}, \ldots \phi_{kk}$، ويمكن حل هذا النظام بأسلوب المحددات لإيجاد ϕ_{kk} بصفة خاصة. ولتوضيح ذلك نكتب النظام (2.3.4)على الشكل التفصيلي الآتي:

$$\rho(1) = \phi_{k1}\ \rho(0) + \phi_{k2}\ \rho(1) + \ldots + \phi_{kk}\ \rho(k-1)$$

$$\rho(2) = \phi_{k1}\ \rho(1) + \phi_{k2}\ \rho(0) + \ldots + \phi_{kk}\ \rho(k-2)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\rho(k) = \phi_{k1}\ \rho(k-1) + \phi_{k2}\ \rho(k-2) + \ldots + \phi_{kk}\ \rho(0)$$

ومن ثم يمكن كتابة نظام يوول والكر باستخدام المصفوفات كما يلي:

$$\underset{\sim}{\rho}(k) = R_k \underset{\approx k}{\phi} \qquad (2.3.5)$$

حيث $\underset{\sim}{\rho}(k)$ متجه عمودي يتكون من k عنصر ويعرف على الشكل:

$$\underset{\sim}{\rho}(k) = [\rho(1) \quad \rho(2) \quad \cdots \quad \rho(k)]'$$

و $\underset{\sim}{\phi}_k$ متجه عمودي يتكون من k عنصر ويعرف على الشكل

$$\underset{\sim}{\phi}_k = [\phi_{k1} \quad \phi_{k2} \quad \cdots \quad \phi_{kk}]'$$

بالإضافة إلى ذلك فإن R_k مصفوفة مربعة من الرتبة k وتعرف على الشكل:

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \ldots\rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \ldots\rho(k-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \ldots\rho(k-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho(k-2) & \rho(k-3) & \rho(k-4) & \ldots \quad \rho(1) \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \rho(k-3) & \ldots \quad 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يمكن حل نظام يوول والكر الخطي بصورة عامة لإيجــاد ϕ_{kk} بدلالــة $\rho(k)$ كما يلي

$$\phi_{kk} = \frac{\Delta_k^*}{\Delta_k} \quad , k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2.3.6)$$

حيث يمثل Δ_k محدد المصفوفة R_k أي أن $\Delta_k = |R_k|$ بينما يمثل $\overset{*}{\Delta}_k$ محدد المصفوفة R_k بعد إحلال العمود الأخير بالمتجه $\underset{\sim}{\rho}(k)$. أي أن

$$\overset{*}{\Delta}_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \ldots\rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \ldots\rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \ldots\rho(3) \\ \vdots & \vdots & & \\ \rho(k-2) & \rho(k-3) & \rho(k-4) & \cdots\rho(k-1) \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \rho(k-3) & \cdots\quad \rho(k) \end{bmatrix}$$

حل نظام يوول والكر المعطي بالمعادلة (2.3.4) يمثل علاقة بين دالة الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} ودالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$، ومن ثم يمكن استغلال هذه العلاقة لتقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي باستخدام تقدير دالة الارتباط الذاتي $r(k)$ والــذي سـبق تقديمـه فـي المبحـث السـابق وذلـك عـن طريـق إحـلال التقـديرات $r(1), r(2), \ldots, r(k)$ مكان المعالم $\rho(1), \rho(2), \ldots, r(k)$ على الترتيـب والأمثلـة الآتية توضح كيفية تقدير بعض قيم دالة الارتباط الذاتي الجزئي بشكل مباشر.

مثال(11):

استخدم نظام يوول والكر في التعبير عن ϕ_{11} بدلالة $\rho(1)$

الحــــل:

بوضع $k = 1$ في نظام يوول والكر (2.3.4) نحصل على

$$\rho(1) = \phi_{11}\,\rho(0) \quad ; \quad \rho(0) = 1$$

ومن ثم فإن

$$\phi_{11} = \rho(1) \qquad (2.3.6)$$

مثال (12):

استخدم نظام يوول والكر في التعبير عـــن ϕ_{22} بدلالـــة $\rho(2), \rho(1)$ بـــشكل مباشر

الحـــــــل:

بوضع $k = 2$ في نظام يوول والكر (2.3.6) نحصل على المعادلتين الآتيين

$$\rho(1) = \phi_{21}\,\rho(0) + \phi_{22}\,\rho(1)$$

$$\rho(2) = \phi_{21}\,\rho(1) + \phi_{22}\,\rho(0)$$

وبالتالي فإن

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{bmatrix} = 1 - \rho^2(1)$$

$$\dot{\Delta}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{bmatrix} = \rho(2) - \rho^2(1)$$

ومن ثم فإن

$$\phi_{22} = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)} \qquad (2.3.7)$$

مثال (13):

أوجد تقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي لبيانات مثال (10) وارسمها

الحـــــــل:

عند حل هذا المثال وجدنا أن

$r(1) = -0.5 \;;\; r(2) = r(3) = r(4) = 0$

من(2.3.6) ، (2.3.7)

$$\hat{\phi}_{11} = r(1) = -0.5$$

$$\hat{\phi}_{22} = \frac{r(2) - r^2(1)}{1 - r^2(1)} = \frac{0 - 0.25}{1 - 0.25} = -\frac{1}{3}$$

$$\hat{\Delta}_3 = \begin{bmatrix} 1 & r(1) & r(2) \\ r(1) & 1 & r(1) \\ r(2) & r(1) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} = 0.5$$

$$\hat{\Delta}_3^* = \begin{bmatrix} 1 & r(1) & r(1) \\ r(1) & 1 & r(2) \\ r(2) & r(1) & r(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} = -0.125$$

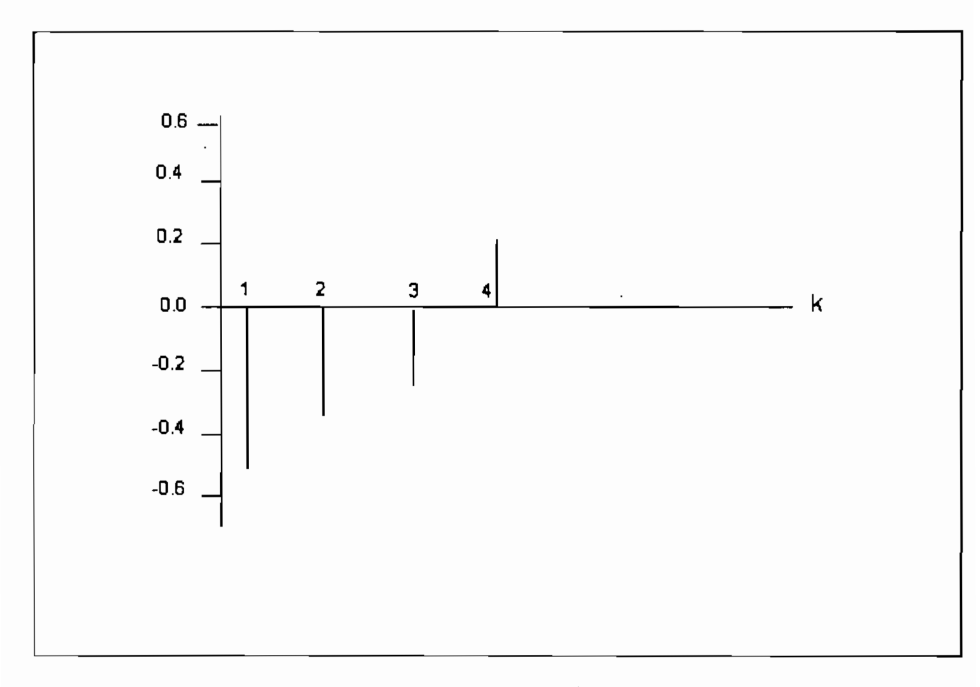
$$\hat{\phi}_{33} = \frac{-0.125}{0.5} = -0.25$$

$$\hat{\Delta}_4 = \begin{bmatrix} 1 & r(1) & r(2) & r(3) \\ r(1) & 1 & r(1) & r(2) \\ r(2) & r(1) & 1 & r(1) \\ r(3) & r(2) & r(1) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} = 0.3125$$

$$\hat{\Delta}_4^* = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} = 0.0625$$

$$\hat{\phi}_{44} = \frac{0.0625}{0.3125} = 0.2$$

ويعرض شكل (5) دالة الارتباط الذاتي الجزئي المقدرة لبيانات المثال (13)



شكل (5): دالة الارتباط الذاتي الجزئي لمثال (13)

2.4 مؤثرات السلاسل الزمنية Time Series Operators

يعتمد الفهم الجيد لمنهجية بوكس وجينكنز على الاستخدام الرياضي الــواعى لبعض المؤثرات الهامة مثل مؤثر الإزاحة للخلف ومؤثر الفرق للخلف. وفيمــا يلــي نلقي الضوء على هذين المؤثرين.

2.4.1 مؤثر الإزاحة للخلف Backward Shift Operator

إذا كانت قيمة الظاهرة (السلسلة) عند الزمن t هي y_t وعند الزمن (t-r) هي y_{t-r} فإن مؤثر النقل للخلف B يعرف كما يلي

$$\begin{aligned}
By_t &= y_{t-1} \\
B^2 y_t &= By_{t-1} = y_{t-2} \\
&\vdots \\
B^r y_t &= y_{t-r} \ , \ r = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

ويلعب المؤثر B دورًا في غاية الأهمية في المعالجات الجبرية المطلوبة عند تقديم منهجية بوكس وجينكنز. وتتعامل منهجية بوكس وجينكنز مع المؤثر B بشكل مشابه للتعامل مع أي كمية جبرية. ويستخدم المؤثر B بكثرة في أسلوب بوكس وجنيكنز في شكل كثيرات حدود وأهمها:

1 . مؤثر الانحدار الذاتي Autoregressive Operator والذي يعرف في الصورة الآتية

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

وهي كثيرة حدود من الدرجة p في المؤثر B، والقيم $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p$ ثوابت. وعادة ما تستخدم كثيرة الحدود $\phi(B)$ مع السلسلة الزمنية موضع الدراسة y_t ومن ثم فإن

$$\begin{aligned}
\phi(B)\, y_t &= y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p} \\
&= \sum_{i=0}^{p} \phi_i \, y_{t-i} \quad ; \ \phi_0 = 1
\end{aligned}$$

2 . مؤثر المتوسطات المتحركة Moving Average Operator والذي يعرف في الصورة الآتية

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$

وهي كثيرة حدود من الدرجة q في المؤثر B والقيم $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_q$ ثوابت .
وعادة ما تستخدم كثيرة الحدود $\theta(B)$ مع عملية "الاضطرابات الهادئة" ε_t كما يلي:

$$\theta(B)\varepsilon_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$= \sum_{j=0}^{q} \theta_j y_{t-j} \quad ; \theta_0 = 1$$

2.4.2 مؤثر الفرق للخلف Backward Difference Operator

ويرمز له بالرمز Δ ويعرف في الصورة الآتية:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1-B)y_t \qquad (2.4.1)$$

$$\Delta^2 y_t = \Delta\Delta y_t = \Delta(y_t - y_{t-1})$$

$$= (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$$

$$\Delta^2 y_t = (1-B)^2 y_t \qquad (2.4.2)$$

من (2.4.1) ,(2.4.2) نصل إلى العلاقة بين المؤثر B والمؤثر Δ كما يلي:

$$\Delta = (1-B) \quad ; \quad \Delta^2 = (1-B)^2$$

وبصفة عامة يمكن إثبات أن

$$\overset{r}{\Delta} = (1-B)^r \ , \ r = 1, 2, \ldots$$

2.5 السلاسل الزمنية غير الساكنة المتجانسة

Homogenous Nonstationary Time Series

إذا كانت العملية العشوائية التي ولدت السلسلة المشاهدة ساكنة فهذا يعني أن الخصائص الإحصائية لهذه العملية لا تتغير من خلال الزمن، ومن ثم يسهل التعبير عن العملية العشوائية في صورة نموذج أو معادلة جبرية بسيطة بمعالم ثابتة يمكن تقديرها بالطرق التقليدية. أما إذا كانت العملية العشوائية التي ولدت السلسلة المشاهدة غير ساكنة أي أن خصائصها الإحصائية تتغير مع الزمن فغالبًا ما تكون هناك صعوبة

كبيرة في التعبير عن العملية (السلسلة) العشوائية بواسطة نموذج أو معادلة جبرية بسيطة. على أية حال قد يسهل أحيانًا نمذجة مثل هذه العمليات كما هو الحال في عملية السير العشوائي ذات الاتجاه.

2.5.1 ما هية السلاسل المتجانسة

في حقيقة الأمر أن معظم السلاسل الزمنية الفعلية التي تنشأ في الاقتصاد ومجال الأعمال والبيئة وغيرها غالبًا ما تكون غير ساكنة في المتوسط الحسابي ولكنها تتميز بخاصية تعرف بالتجانس. ويقصد بهذه الخاصية أنه بالرغم من أن المتوسط الحسابي لمثل هذه العمليات قد يتغير مع الزمن، إلا أن أجزاء من السلسلة تسلك سلوكًا متشابهًا إلى حد كبير يمكن معه تحويل هذه السلاسل إلى سلاسل ساكنة. ومن ناحية أخرى – وبغض النظر عن سكون المتوسط من عدمه – فإن الكثير من السلاسل الفعلية التي تنشأ في فروع المعرفة المختلفة خاصة في الاقتصاد والبيئة يتغير تباينها بتغير الزمن (غالبًا ما يتزايد) ، وهذا التغير عادة ما يأخذ نمط معين. مثل هذه العمليات (السلاسل) أيضًا يمكن تحويلها إلى سلاسل ساكنة باستخدام بعض التحويلات الرياضية البسيطة. وبصفة عامة يطلق على العمليات (السلاسل) التي يمكن تحويلها إلى عمليات ساكنة بالسلاسل الزمنية غير الساكنة المتجانسة.

وتجدر الإشارة بالقول بأن التحويلات الرياضية التي تستخدم في تسكين السلاسل لا يقتصر استخدامها مع النماذج العشوائية فقط بل يتمد استخدامها أيضًا ليشمل النماذج المحددة (غير العشوائية). فإذا كان الاتجاه العام للسلسلة محدد (غير عشوائي) deterministic ويمكن تمثيله – على سبيل المثال – في شكل كثيرة حدود بمعاملات لا تتغير مع الزمن، فإن بعض التحويلات كما سنرى في الأمثلة تساعد في تسكين هذه السلاسل. وفيما يلي نلقى الضوء على أهم التحويلات الرياضية التي تستخدم لتسكين النماذج (العمليات) العشوائية والنماذج المحددة.

2.5.2 التحويلات وتسكين السلسلة

من الأمور المسلم بها عند استخدام منهجية بوكس وجينكنز في تحليل السلاسل الزمنية التأكد من سكون السلسلة المشاهدة فإذا كانت السلسلة غير ساكنة، فإنه يجب تحويلها إلى سلسلة أخرى ساكنة قبل استخدام هذه المنهجية باستخدام بعض التحويلات الرياضية الهامة وأهمها أخذ فروق السلسلة (الأولى أو الثانية) أو أخذ فروق اللوغاريتمات (الأولى أو الثانية) كما يلي:

فروق السلسلة

إذا أظهرت السلسة المشاهدة y_t اتجاهًا – سواء كان محدد أو عشوائي – فإن أخذ فروق السلسلة الأولى عادة ما ينجح في تحويل هذه السلسلة إلى سلسلة أخرى ساكنة. فإذا رمزنا للسلسلة الجديدة بالرمز z_t فإن:

$$z_t = \Delta y_t = y_t - y_{t-1} \quad , \quad t = 2, 3, ..., n$$

حيث يرمز n إلى عدد المشاهدات المتاحة أو ما يعرف عادة بطول السلسلة أو مجازًا بحجم العينة.

فإذا كانت مشاهدات السلسلة الأصلية (غير الساكنة) هي $y_1, y_2, ..., y_n$ فإن أخذ الفروق الأولى First difference لهذه السلسلة قد يتطلب إنشاء جدول كالآتي:

y_t	y_{t-1}	$z_t = y_t - y_{t-1}$
y_1	-	–
y_2	y_1	$z_2 = y_2 - y_1$
y_3	y_2	$z_3 = y_3 - y_1$
⋮	⋮	⋮
y_n	y_{n-1}	$z_n = y_n - y_{n-1}$

والجدير بالملاحظة هنا أن عدد مشاهدات السلسلة الجديدة z_t هو (n-1) فقط وليس n، أي أننا نفقد مشاهدة واحدة عند أخذ الفروق الأولي للسلسلة.

مثال (14):

إذا كانت السلسلة y_t يمكن التعبير عنها في الشكل التالي

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t \quad , \quad t = 1, 2, ..., n$$

حيث $\{u_t\}$ عملية عشوائية ساكنة لها توقع μ وتباين σ^2 ودالة تغاير $\gamma(k)$. أثبت أن السلسلة y_t غير ساكنة. كيف يمكن تحول هذه السلسلة إلى سلسلة ساكنة؟

الحل:

$$E(y_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \mu \;;\; t = 1, 2, ..., n$$

أي أنه يوجد اتجاه عام في متوسط السلسلة y_t. وهذا يكفي لإثبات عدم سكون السلسلة y_t.

حيث إن

$$y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 (t-1) + u_{t-1}$$

فإن

$$z_t = \Delta y_t = \beta_1 + u_t - u_{t-1} \;,\; t = 2, 3, ..., n$$
$$E(Z_t) = \beta_1 + \mu - \mu = \beta_1$$

أي أن السلسلة z_t ساكنة في التوقع

$$Var(Z_t) = Var(\beta_1 + U_t - U_{t-1}) = Var(U_t - U_{t-1})$$
$$Var(Z_t) = 2\sigma^2 - 2\gamma(1)$$

وبالتالي فإن السلسلة z_t ساكنة في التباين.

أيضًا بالنسبة لدالة التغاير الذاتي للسلسلة z_t ولتكن $h(k)$ نجد أن

$$h(1) = Cov(Z_{t-1}, Z_t) = Cov(\beta_1 + U_{t-1} - U_{t-2}, \beta_1 + U_t - U_{t-1})$$
$$= \gamma(1) - \sigma^2 - \gamma(2) + \gamma(1) = 2\gamma(1) - \sigma^2 - \gamma(2)$$

أى أن التغاير $h(1)$ لا يعتمد على t

$$h(2) = Cov(Z_{t-2}, Z_t) = Cov(\beta_1 + U_{t-2} - U_{t-3}, \beta_1 + U_t - U_{t-1})$$
$$= \gamma(2) - \gamma(1) - \gamma(3) + \gamma(2) = 2\gamma(2) - \gamma(1) - \gamma(3)$$

وبصفة عامة يمكن إثبات أن

$$h(k) = 2\gamma(k) - \gamma(k-1) + \gamma(k+1)$$

أي أن دالة التغاير الذاتي للسلسلة z_t لا تعتمد على الزمن ولكن تعتمد فقط على الفجوة الزمنية k. ومن ثم فإن السلسلة z_t ساكنة.

مثال: (15):

إذا كانت السلسلة y_t يمكن التعبير عنها في الشكل التالي

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1, 2, ..., n$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية "اضطرابات هادئة". اثبت أن السلسلة y_t غير ساكنة. كيف يمكن تحويل هذه السلسلة إلى سلسلة ساكنة؟

الحـــــل:

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) \quad , \quad t = 1, 2, ..., n$$

وبالتالي فإن y_t ساكنة في التوقع

$$Var(Y_t) = Var(Y_{t-1}) + \sigma^2 + 2\,Cov(Y_{t-1}, \varepsilon_t)$$

أي أن

$$Var(Y_t) \neq Var(Y_{t-1})$$

وبالتالي فإن السلسلة y_t ليست ساكنة في التباين ، ومن ثم فهي غير ساكنة.

حيث إن

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

فإن

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$$

أي أن

$$z_t = \Delta y_t = \varepsilon_t \quad , \quad t = 2, 3, ..., n$$

وبالتالي فإن السلسلة z_t ساكنة لأن $\{\varepsilon_t\}$ عملية ساكنة

ويلاحظ هنا أن الفروق الأولي قد نجحت في تحويل سلسلة غير ساكنة في التباين وساكنة في المتوسط إلى سلسلة ساكنة.

مثال (16):

إذا كانت السلسلة y_t يمكن التعبير عنها في الشكل التالي:

$$y_t = \delta + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1, 2, ..., n$$

حيث δ ثابت لا يساوي الصفر و $\{\varepsilon_t\}$ عملية "اضطرابات هادئة". اثبت أن العملية $\{y_t\}$ غير ساكنة. كيف يمكن تحويل هذه العملية إلى عملية ساكنة؟

الحـــــل:

$$y_t = \delta + y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

$$E(Y_t) = \delta + E(Y_{t-1})$$

أي أن

$$E(Y_t) \neq E(Y_{t-1})$$

ومن ثم فإن العملية $\{Y_t\}$ غير ساكنة

من المعادلة (1) نجد أن

$$z_t = \Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$
$$y_t - y_{t-1} = \delta + \varepsilon_t$$

أي أن

$$z_t = \Delta y_t = \delta + \varepsilon_t \ , \ t = 2, 3, ..., n \qquad (2)$$

ومن ثم فإن

$$E(Z_t) = \delta \ , \ t = 2, 3, ..., n$$
$$V(Z_t) = V(\delta + \varepsilon_t) = \sigma^2 \ , \ t = 2, 3, ..., n$$

أي أن التوقع والتباين للعملية $\{z_t\}$ لا يعتمدان على الزمن.

$$\gamma(k) = Cov(Z_{t-k}, Z_t)$$

من (2)

$$\gamma(k) = Cov(\delta + \varepsilon_{t-k}, \delta + \varepsilon_t) = 0, \ k \neq 0$$

ومن ثم فإن دالة التغاير الذاتي للعملية $\{z_t\}$ لا تعتمد على الزمن وبالتالي فإن العملية $\{z_t\}$ ساكنة لعدم اعتماد التوقع والتباين ودالة التغاير الذاتي على الزمن. ويلاحظ هنا أن العملية $\{y_t\}$ غير ساكنة في التوقع والتباين وأن الفروق الأولى قد نجحت في تحويل هذه السلسلة إلى سلسلة ساكنة.

قد تظل سلسلة للفروق الأولى z_t غير ساكنة أيضاً، وفي هذه الحالة لابد من أخذ الفروق الثانية $\Delta^2 y_t$ أو الفروق الأولى للسلسلة z_t أي Δz_t.

وهذا النوع من التحويلات مفيد في كثير من الأحيان.وفي مثل هذه الحالات قد يكون من المفيد عمل جدول كالتالي لإيجاد الفروق الثانية w_t.

y_t	y_{t-1}	$z_t = y_t - y_{t-1}$	z_{t-1}	$w_t = z_t - z_{t-1}$
y_1	-	–	-	–
y_2	y_1	$z_2 = y_2 - y_1$	-	–
y_3	y_2	$z_3 = y_3 - y_2$	z_2	$w_3 = z_3 - z_2$
			z_3	$w_4 = z_4 - z_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
y_n	y_{n-1}	$z_n = y_n - y_{n-1}$	z_{n-1}	$w_n = z_n - z_{n-1}$

وعدد مشاهدات السلسلة الجديدة w_t هو (n-2) أي أننا نفقد مشاهدتين عند أخذ الفروق الثانية للسلسلة الأصلية y_t.

مثال (17):

إذا كان $y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + \delta + \varepsilon_t$ حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية "اضطرابات هادئة" و δ مقدار ثابت لا يساوي الصفر. اثبت أن العملية $\{y_t\}$ غير ساكنة وحولها إلى عملية ساكنة.

الحـــــل:

$$E(Y_t) = 2E(Y_{t-1}) - E(Y_{t-2}) + \delta \qquad (1)$$

إذا كانت العملية $\{y_t\}$ ساكنة فإن هذا يعني أن

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = E(Y_{t-2}) = \mu \qquad (2)$$

حيث μ مقدار ثابت

بالتعويض من (2) في (1) نصل إلى:

$$\mu = 2\mu - \mu + \delta \Rightarrow \delta = 0$$

وهذا يخالف الفرض القائل بأن $\delta \neq 0$ ، ومن ثم فإن العمليـــة $\{y_t\}$ غيـــر ساكنة.

$$z_t = y_t - y_{t-1} = 2y_{t-1} - y_{t-2} + \delta + \varepsilon_t - y_{t-1}$$
$$z_t = (y_{t-1} - y_{t-2}) + \delta + \varepsilon_t$$
$$z_t = z_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

واضح أن العملية $\{z_t\}$ غير ساكنة

$$z_t - z_{t-1} = \delta + \varepsilon_t$$

$$w_t = \Delta z_t = \Delta^2 y_t = \delta + \varepsilon_t \quad , \quad t = 3, 4, ..., n$$

ومن ثم فإن

$$E(W_t) = \delta \quad , \quad t = 3, 4, ..., n$$
$$Var(W_t) = \sigma^2 \quad , \quad t = 3, 4, ..., n$$
$$\gamma(k) = Cov(W_t, W_{t-k}) =$$
$$= Cov(\delta + \varepsilon_t, \delta + \varepsilon_{t-k}) = 0 \quad , \quad k \neq 0$$

وبالتالي فإن العملية $\{w_t\}$ ساكنة لأن عزومها حتى الرتبة الثانية لا تعتمـــد على الزمن

فروق اللوغاريتمات

وجود اتجاه في متوسط الظاهرة – سواء كان اتجاهًا محددًا أو عشوائيًا –هـــو إحدى الطرق التي يحدث بها عدم السكون في التطبيقات العملية، وقد رأينـــا أن أخـــذ الفروق الأولى والثانية في هذه الحالات غالبًا ما ينجح في تحويل مثل هذه الـــسلاسل إلى سلاسل ساكنة. وقد يتزايد تباين السلسلة بمرور الزمن – أو يتنـــاقص – لـــبعض

الظواهر الاقتصادية والاجتماعية وغيرها مع ثبات تقريبي في المتوسط، وفي مثل هذه الحالات تعتبر تحويلة اللوغاريتمات من أهم التحويلات التي تستخدم في تسكين التباين إذا كانت كل قيم السلسلة موجبة. وفي الواقع أن تحويلة الجذر التربيعي أو المقلوب أو تحويلات بوكس وكوكس – المشهورة في مجال تصميم وتحليل التجارب – قد تستخدم أيضًا لتسكين التباين، إلا أن تحويلة اللوغاريتمات تظل الاختيار الأول في مثل هذه الحالات. أما أهم حالة من حالات عدم سكون السلاسل هي تلك التي يكون فيها عدم سكون للمتوسط والتباين معًا، فالكثير من الظواهر خاصة الاقتصادية والسكانية تكون قيمتها عند الزمن t أكبر من قيمتها عند الزمن (t-1) بنسبة معينة بالإضافة إلى أخطاء عشوائية بالطبع. وفي مثل هذه الحالات يمكن التعبير عن السلسلة الزمنية بشكل تقريبي في شكل النموذج.

$$y_t = y_{t-1} + \alpha y_{t-1} \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

وتتميز هذه النوعية من السلاسل بوجود اتجاه متزايد في كل من المتوسط والتباين بالإضافة إلى ثبات تقريبي لمعدل نمو الظاهرة. ولاستخدام تحويلة اللوغاريتم يمكن إعادة كتابة النموذج على الصورة

$$y_t = (1+\alpha)\ y_{t-1}$$

وبالتالي فإن

$$\ln(y_t) = \ln(1+\alpha) + \ln(y_{t-1})$$

وهذا يؤدي إلى

$$\ln(y_t) - \ln(y_{t-1}) = \delta$$

حيث δ مقدار ثابت، وهذا يعني أن

$$z_t = \Delta \ln(y_t) = \ln(y_t) - \ln(y_{t-1}) = \delta$$

وهذا يعني أن الفروق الأولى للوغاريتمات $\{z_t\}$ هي عملية ساكنة

وتجدر الإشارة هنا إلى ثلاث ملاحظات هامة. الملاحظة الأولى أنه لا يفضل استخدام هذا النوع من التحويلات إلا بعد محاولة استخدام الفــروق العاديــة الــسابق الحديث عنها. الملاحظة الثانية أنه يجب التأكد من أن كل قيم السلسلة y_t موجبة قبل استخدام هذا النوع من التحويل. أما الملاحظة الثالثة فــإن سلــسلة الفــروق الأولـــى للوغاريتمات قد تظل غير ساكنة في بعض الحالات ومن ثم يجب أخذ الفروق الثانيـــة للوغاريتمات لتسكين السلسلة، وفي مثل هذه الحالات قد يكون من المفيد عمل جــدول كالتالي.

y_t	$y_t^* = \ln y_t$	y_{t-1}^*	$z_t = y_t^* - y_{t-1}^*$	z_{t-1}	$w_t = z_t - z_{t-1}$
y_1	y_1^*	-	-	-	-
y_2	y_2^*	y_1^*	$z_2 = y_2^* - y_1^*$	-	-
y_3	y_3^*	y_2^*	$z_3 = y_3^* - y_2^*$	z_2	$w_3 = z_3 - z_2$
y_4	y_4^*	y_3^*	$z_4 = y_4^* - y_3^*$	z_3	$w_4 = z_4 - z_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	z_4 $\vdots$	$\vdots$
y_{n-1}	y_{n-1}^*	y_{n-2}^*	$z_{n-1} = y_{n-1}^* - y_n^*$	z_n	$w_{n-1} = z_{n-1} - z_{n-2}$
y_n	y_n^*	y_{n-1}^*	$z_n = y_n^* - y_{n-1}^*$	z_{n-1}^*	$w_n = z_n - z_{n-1}$

تمارين على الباب الثاني

1. اشرح الفرق بين السكون التام والسكون الضعيف موضحًا العلاقات التي قد توجد بينهما.

2. اشرح الفرق بين مفهوم معامل بيرسون للارتباط الخطي والارتباط الجزئي في البيانات المقطعية موضحًا العلاقات التي قد توجد بينهما.

3. ما أهمية فرض السكون في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية.

4. أوجد العلاقة بين مؤثر النقل للخلف B والمؤثر Δ^3 واثبت هذه العلاقة.

5. علق على مدى صحة العبارات الآتية مع الشرح الدقيق.

(a) السلسلة التي تتبع النموذج $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ حيث $\{y_t\}$ عملية "الاضطرابات الهادئة" دائمًا غير ساكنة لكل قيم $(\beta_0, \beta_1) \in R^2$

(b) دالة الارتباط الذاتي للسلسلة التي تتبع النموذج $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ تدل على عدم سكون هذه السلسلة.

(c) إذا كان معامل الارتباط الذاتي عند الفجوة الزمنية الثانية يساوي الواحد فإن $\phi_{22} = 1$

6. اشرح المقصود بالسلاسل غير الساكنة المتجانسة مع ذكر بعض الأمثلة التي تشمل اتجاه غير عشوائي أو عشوائي. كيف يمكن تسكين هذه السلاسل؟

7. هل يمكن أن توجد سلسلة زمنية ساكنة لها دالة الارتباط الذاتي لكل حالة من الحالات الآتية ؟ اشرح سبب إجابتك.

(a) $\rho(k) = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}$

(b) $\rho(k) = (0.5)^K \quad ; \; k = 0, 1, 2, \ldots$

$$(c)\ \rho(k) = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0.5 & ,|k| = 1 \\ 0 & ,|k| > 1 \end{cases}$$

$$(d)\ \rho(k) = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0.9 & ,|k| = 1 \\ 0 & ,|k| > 1 \end{cases}$$

$$(e)\ \rho(k) = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ -0.3 & , k = 1 \\ 0 & , k > 1 \end{cases}$$

$$(f)\ \rho(k) = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ -0.8 & , k = 1 \\ 0.8 & , k = 2 \\ 0 & , k > 2 \end{cases}$$

8. اثبت أن مصفوفة التغاير يجب أن تكون موجبة تامة Positive definite..

9. اثبت أن أي توليفة خطية في عملية ساكنة (بالمفهوم الضعيف) هي أيضًا عملية ساكنة.

10. إذا كان $y_t = 1 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$ حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية "اضطرابات هادئة". أوجد دالة الارتباط الذاتي للعملية $\{y_t\}$. وارسمها وعلق على الشكل.

11. أوجد دالة الارتباط الذاتي للعملية

$$z_t = 1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

ارسم هذه الدالة وقارن بينها وبين الرسم في التمرين 10.

12. قارن بين درجة تمهيد (نعومة) العملية $\{\varepsilon_t\}$ وكل من العمليتين $\{y_t\}$ و $\{z_t\}$ في التمرينين (10), (11).

13. تمثل البيانات الآتية المبيعات الشهرية من نوع معين من أنواع الأجهزة الكهربائية لإحدى الشركات الكبيرة (تقرأ البيانات أفقيًا).

204	207	207	204	204	208	202	200
205	203	202	200	198	201	199	202
198	201	203	203	206	204	211	207
200	203	203	200	206	207	206	200
				204	202	195	200

(a) ارسم السلسلة الزمنية وعلق على الشكل من حيث السكون والارتباط الذاتي $r(1)$.

(b) هل يمكن إجراء التحليل الاستكشافي لهذه البيانات؟ اشرح سبب إجابتك.

(c) اكتب الأعمدة y_t, y_{t+1}, y_{t+2} في شكل ثلاثة أعمدة متجاورة. اعرض العلاقة بين y_t, y_{t+1}, y_{t+2} بيانيا، وعلق على الشكل.

(d) ارسم العلاقة بين y_t, y_{t+2} وعلق عليها.

(e) احسب الكميات $r(1), r(2), r(3), \hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{22}, \hat{\phi}_{33}$ وقارن بين هذه النتائج.

14. حسبت دالة الارتباط الذاتي لإحدى السلاسل الزمنية فكانت كالتالي:

$$\rho(1) = 0.8; \quad \rho(2) = 0.55; \quad \rho(k) = 0, k \geq 3$$

هل الشروط الضرورية للسكون متحققة لهذه السلسلة

15. اثبت أن أي سلسلة ساكنة يجب أن تحقق الشرط الآتي:

$$\left|\frac{\rho(2)-\rho^2(1)}{1-\rho^2(1)}\right|<1$$

16. عمليتان عشوائيتان ومستقلتان لهما دالتي التغاير الذاتي الآتيتين:

$$y_t : \gamma(0)=0.5;\ \gamma(1)=0.1;\ \gamma(j)=0, j\geq 2$$

$$z_t : \gamma(0)=2.3\ ;\ \gamma(1)=-1.43\ ;\ \gamma(2)=0.3\ ;\gamma(j)=0, j\geq 3$$

احسب دالة التغاير للعملية $w_t = y_t + z_t$ ثم اثبت أن العملية w_t ساكنة.

17. اكتب النماذج الآتية باستخدام مؤثر الإزاحة للخلف

a) $y_t - 0.5\ y_{t-1} = \varepsilon_t$

b) $y_t = \varepsilon_t - 1.3\ \varepsilon_{t-1} + 0.4\,\varepsilon_{t-2}$

c) $y_t - 0.5\ y_{t-1} = \varepsilon_t - 1.3\ \varepsilon_{t-1} + 0.4\ \varepsilon_{t-2}$

18. اكتب معادلات يوول والكر لكل نموذج من النماذج الآتية:

a) $y_t - 0.5\ y_{t-1} = \varepsilon_t$

b) $y_t - 1.5\ y_{t-1} + 0.5\ y_{t-2} = \varepsilon_t$

19. لكل نموذج من النماذج في التمرين (18) أوجد $\rho(2)$, $\rho(1)$, ϕ_{kk}

20. عبر عن النماذج الآتية باستخدام مؤثر الفرق للخلف

a) $y_t - 2.2\ y_{t-1} + 0.8\,y_{t-3} = \varepsilon_t - 3\varepsilon_{t-1} + 2\varepsilon_{t-2}$

b) $y_t - 0.8\ y_{t-2} = \varepsilon_t + 3\ \varepsilon_{t-1}$

21. عبر عن المقادير الآتية بدلالة العملية $\{y_t\}$ والعملية $\{\varepsilon_t\}$

a) $\Delta^3 y_t = \Delta\,\varepsilon_t$

b) $\Delta^2 y_t = \Delta^3\,\varepsilon_t$

22. هل السلاسل الآتية ساكنة؟

a) $y_t = \delta + y_{t-1} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad \delta \in R$

b) $y_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + 3\varepsilon_{t-2}$

c) $y_t = 0.5 e^{-0.5t}$

d) $y_t = 2 + 3t - 0.5 t^2 + \varepsilon_t$

23. إذا كانت السلسلة y_t يمكن التعبير عنها في الشكل الآتي:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

حيث $\{y_t\}$ عملية "اضطرابات هادئة"

(a) أوجد التوقع والتباين ودالة الارتباط الذاتي للسلسلة.

(b) اثبت أن هذه غير ساكنة.

(c) اثبت أنه يمكن تحويل هذه السلسلة إلى سلسلة ساكنة.

24. حل تمرين (23) بعد إحلال العملية $\{u_t\}$ مكان العملية $\{\varepsilon_t\}$ حيث $\{u_t\}$ عملية عشوائية ساكنة لها التوقع μ والتباين σ^2 ودالة تغاير معينة $\gamma(k)$

25. إذا كانت العملية $\{\varepsilon_t\}$ "عملية اضطرابات هادئة" وكانت العملية $\{y_t\}$ معرفة كالتالي:

$$y_t = \frac{1}{3}[\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) \quad , \quad t = 2, 3, \ldots$$

(a) ما هو الاسم العلمي للعملية $\{y_t\}$

(b) أوجد $E(Y_t)$, $Var(Y_t)$, $\gamma(s,t)$

(c) هل العملية $\{y_t\}$ ساكنة ؟ لماذا؟

26. إذا علمت أن

$$y_t = \frac{1}{m}[\varepsilon_{t-\frac{(m-1)}{2}} + \cdots + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} + \cdots + \varepsilon_{t+\frac{(m-1)}{2}}]$$

$$m = 3,5,7,\ldots; t = \frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}, \ldots$$

أوجد الصورة العامة للمقاييس $E(Y_t)$ ، $Var(Y_6)$ ، $\gamma(s,t)$

27. أوجد دالة الارتباط الذاتي لكل عملية من العمليات التي ذكـرت فـي التمـارين (26) , ,(25) وارسم كل دالة لبعض قيم m مثل $m = 3, 5, 7$.

28. أوجد $\rho(k)$ لكل نموج من النماذج الآتية مع رسم كل منها والمقارنة والتعليق.

a) $y_t = 0.5\ y_{t-1} + \varepsilon_t$

b) $y_t = 2\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$.

c) $y_t = \varepsilon_{t-2} - 0.5\ \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

d) $y_t = \varepsilon_t + 0.5\,\varepsilon_{t-1} + 0.5^2\,\varepsilon_{t-2} + 0.5^3\ \varepsilon_{t-3} + \ldots$

الباب الثالث

نماذج السلاسل الزمنية العشوائية
STOCHASTIC TIME SERIES MODELS

تناولنا في الباب السابق المفاهيم والأدوات الضرورية لفهم واستيعاب مفردات المنهج الحديث في تحليل السلاسل الزمنية بطريقة بوكس وجينكنز. ومن هذه المفاهيم قدمنا معنى السكون وأنواعه وأهميته وكيفية تسكين السلاسل المتجانسة. وعلى الرغم من أهمية السكون في تخفيض عدد المعالم التي يجب تقديرها من$n(n+3)/2$ إلى $(n+1)$ معلمة فقط، إلا أن هذا العدد ما زال كبيراً بشكل يستدعي معه ضرورة وضع المزيد من القيود أو الافتراضات حول العملية العشوائية التي ولدت بيانات السلسلة المشاهدة أو المرصودة. وفي الحقيقة أنه يمكن تلخيص هذه القيود في افتراض وجود نموذج عشوائي يحتوى على عدد محدود من المعالم قادر على وصف الخصائص العشوائية الكامنة في العملية العشوائية التي ولدت السلسلة المشاهدة. والنموذج العشوائي في مجال السلاسل الزمنية يمكن اعتباره.بمثابة آلية قادرة على إنتاج السلسلة المتاحة. هذه الآلية من الناحية النظرية البحتة قادرة على توليد مجموعة لا نهائية من السلاسل الزمنية الأخرى على نفس الفترة الزمنية موضع الدراسة. كل سلسلة من هذه السلاسل تختلف عن الأخرى من حيث القيم ولكنها جميعاً تخضع لنفس القواعد والآلية الاحتمالية. وبذلك يلعب النموذج دور المجتمع في علم الإحصاء، وتلعب السلسلة الزمنية المرصودة دور العينة إن جاز التعبير واضعين في الاعتبار أن هذه العينة هي عينة عشوائية ولكن مفرداتها غير مستقلة. ولذلك فقد خصصنا هذا الباب لدراسة مجموعة هامة وفريدة من نماذج السلاسل الزمنية العشوائية قادرة على عكس العديد

من هياكل وأنماط الارتباط الذاتي أو التسلسلي في البيانات. هذه النماذج تعرف في الأوساط العلمية بالنماذج الخطية أو نماذج ARMA وهى النماذج التي ارتضاها بوكس وجينكنز لكى تكون أساساً لتقديم أسلوبهما إلى فكر السلاسل الزمنية. ويبدأ هذا الباب بمقدمة عن الفرق بين معنى الخطية في مجال الانحدار ومعناه في مجال السلاسل الزمنية والفرق بين النماذج الاستاتيكية والنماذج الديناميكية. ويتناول المبحث الثالث الصور المختلفة لنماذج السلاسل الزمنية الخطية وأهمها صيغة الاضطرابات الهادئة White noise وصيغة الانعكاس invertibility باستخدام ماضي أو تاريخ السلسلة. ويتناول المبحث الرابع بالتفصيل نماذج الانحدار الذاتي وأنواعها وشروط سكونها واشتقاق الخصائص الإحصائية لها. أما المبحث الخامس فيهدف إلى تقديم نماذج المتوسطات المتحركة وأنواعها وشروط انعكاسها واشتقاق الخصائص الإحصائية الهامة لها. كما يهدف المبحث السادس إلى تعريف عمليات ARMAالمختلطة وأنواعها وشروط سكونها وانعكاسها واشتقاق الخصائص الهامة لها. ويقدم المبحث السابع مفهوم عمليات الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية. أما المبحث الثامن والأخير فيقدم أسلوباً عاماً لإيجاد شروط سكون أو انعكاس السلاسل الزمنية.

وبنهاية هذا الباب سيكون الطالب قادراً على

- التمييز بين مدلول الخطية في الانحدار ومدلوله في السلاسل الزمنية.
- التمييز بين النماذج الاستاتيكية والنماذج الديناميكية.
- التمييز بين صيغة الاضطرابات الهادئة وصيغة الانعكاس.
- معرفة واشتقاق العلاقة بين أوزان إبساي وأوزان باي.
- تعريف وتفسير عمليات الانحدار الذاتي.
- اشتقاق الخصائص الإحصائية لعمليات الانحدار الذاتي.
- اشتقاق شروط السكون لعمليات الانحدار الذاتي المختلفة.

- التمييز بين سلوك دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لنماذج الانحدار الذاتي.
- تعريف وتفسير عمليات المتوسطات المتحركة.
- اشتقاق الخصائص الإحصائية لعمليات المتوسطات المتحركة.
- فهم مدلول الانعكاس وأهميته.
- اشتقاق شروط الانعكاس لنماذج المتوسطات المتحركة.
- التمييز بين سلوك دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لنماذج المتوسطات المتحركة.
- تعريف وتفسير عمليات ARMA المختلطة.
- اشتقاق الخصائص الإحصائية لعمليات ARMA المختلطة.
- التمييز بين سلوك دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لعمليات الانحدار الذاتي وعمليات المتوسطات المتحركة وعمليات ARMA المختلطة.
- معرفة شروط السكون والانعكاس لنماذج ARMA المختلطة.
- فهم مدلول عمليات الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية.
- تطبيق الأسلوب العام لإيجاد شروط السكون والانعكاس لنماذج ARMA العامة.

3.1 مقدمة Introduction

لو استرجعنا مفهوم الخطية في نماذج الانحدار التقليدية $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_p, \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p) + \varepsilon$ نجد أن المقصود بالخطية أساساً هو الخطية في المعاملات أو المعالم الرئيسية $\beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p)'$ بغض النظر عن الشكل في المتغيرات المفسرة $x = (x_1, x_2, \cdots, x_p)'$. فعلى سبيل المثال نموذج الانحدار البسيط $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$ هو نموذج انحدار خطي لأنه خطي في

المعلمتين β_0, β_1 وليس لأنه خطي في المتغير المفسر X. ولذلك فإن نماذج من النوع
$y_t = \beta_0 + \beta_1 \ln x_t + \varepsilon_t$ و $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t^2 + \varepsilon_t$ ، $y_t = \beta_0 + \dfrac{\beta_1}{x_t} + \varepsilon_t$ و
$y_t = \beta_0 + \beta_1 \sin x_t + \varepsilon_t$

هي نماذج خطية. فالنموذج $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t^2 + \varepsilon_t$ على سبيل المثال لا يسبب أي مشكلة رياضية أو إحصائية لأنه يمكن وضع $w_t = x_t^2$ وبالتالي نحصل على نموذج الانحدار البسيط $y_t = \beta_0 + \beta_1 w_t + \varepsilon_t$ وتظل تقديرات المربعات الصغرى العادية OLSE كما هي في الصورة

$$\hat{\beta} = (W'\,W)^{-1}\,W'y$$

حيث تعرف مصفوفة المشاهدات W كما يلي

$$W' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ w_1 & w_2 & \cdots w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots x_n^2 \end{bmatrix}$$

أما النموذج $y_t = \beta_0 + \beta_1^2 x_t + \varepsilon_t$ فهو نموذج انحدار غير خطي لأنه غير خطي في المعلمة β_1، ومن ثم لا يمكن تطبيق قواعد الانحدار المعروفة في مجال الانحدار الخطي العام على هذا النموذج.

وتجدر الإشارة إلى أن السبب الأساسي في فرض الخطية عند التعامل مع نماذج الانحدار هو السهولة الرياضية في الحصول على تقديرات المربعات الصغرى لمعلمات هذه النماذج وسهولة دراسة خصائصها الإحصائية. فالنموذج الخطي في المعالم يضمن أن يكون مجموع مربعات الأخطاء $SSE = \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2$ دالة من الدرجة الثانية في المعالم أو المعاملات، ومن ثم فإن تفاضل هذه المركبة بالنسبة لهذه المعالم ومساواته بالصفر للحصول على تقديرات المربعات الصغرى يعطي نظام من المعادلات الخطية في المعالم $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p$ يمكن حله بطريقة تامة exact عن طريق المحددات أو المصفوفات للحصول على الصيغة العامة لتقديرات المربعات الصغرى

المعروفة جيداً وهى $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$. ومن ناحية أخرى فنموذج مثـل النمـوذج $y_t = \beta_0 + \beta_1^2 x_t + \varepsilon_t$ يعطي مجموع مربعات للأخطاء دالة في β_1^4، ومن ثم فـإن تفاضل هذه المركبة بالنسبة للمعلمتين β_0, β_1 يعطي نظام غير خطـي فـي β_1 لا يمكن حله بطريقة المحددات أو المصفوفات، أي أن القانون العام $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$ لا يمكن تطبيقه مع مثل هذه النماذج. وبصفة عامة فإن النماذج غير الخطية أصعب كثيراً من النماذج الخطية من الناحيتين. الرياضية والإحصائية، وعادة ما تـستخدم طـرق عددية أكثر تعقيداً لتحليلها كما سنري فيما بعد.

أما في مجال السلاسل الزمنية فيوجد العديد من الدوال التي تربط المتغيـر أو الظاهرة موضع الدراسة y_t بالقيم الماضـية لهـذا المتغيـر وهـى $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$ بالإضافة إلى الـصدمات أو الاضـطرابات الهادئـة التـي حـدثت فـي الماضـي $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$. ولكننا سنقتصر هنا على دراسة أهم مجموعة من هذه الدوال والتـي تعـرف بنمـاذج الـسلاسل الزمنيـة الخطيـة Linear time series models. والجدير بالذكر هنا أن مفهوم الخطية فـي نمـاذج السلاسل الزمنية يختلف عن مفهوم الخطية في نماذج الانحدار السابق شـرحه. فـإذا كانت الخطية في نماذج الانحدار تعنى الخطية في المعالم –للأسباب السابق شـرحها– فإن الخطية في نماذج السلاسل الزمنية تعنى الخطية في المتغيرات المفسرة، بمعنى أن المتغيـر أو الظـاهرة y_t يكـون دالـة خطيـة فـي المتغيـرات $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$. وهذه النماذج الخطية (في المتغيرات) قد تكون خطية أو غير خطية في المعالم الرئيسية، ولكن معظم هذه النماذج غير خطية في المعالم كما سنرى وهذا السبب هو أحد الصعوبات الأساسية في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية.

3.2 النماذج الاستاتيكية والديناميكية Static and Dynamic Models

نماذج الانحدار $y_t = f(x_1, \ldots, x_p, \beta_0, \cdots, \beta_p) + \varepsilon_t$ التقليدية التي تطبـق على البيانات الزمنية تعتبر من قبيل الأنظمة الاستاتيكية أي غير الديناميكية. فالنموذج

$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$ على سبيل المثال يعتمد على المتغير ε_t والذي يمثل الإزعاج أو الاضطراب الذي يتأثر به النظام عند الفترة الزمنية أو الوحدة الزمنية t، ولا تمتد آثار هذا المتغير للفترة الزمنية أو الوحدة الزمنية التالية (t+1) وذلك لأن النظام عند الوحدة الزمنية (t+1) يعتمد على ε_{t+1} فقط كمتغير عشوائي والذي لا يرتبط بعلاقة مع المتغير ε_t. ولذلك يقال أن هذا النموذج ليس له أي ذاكرة لأنه ينسى تماماً الاضطرابات التي تعرض لها النظام في الماضي، ويطلق على النظام الذي يحكم هذه النوعية من النماذج النظام الاستاتيكي Static System.

ومن ناحية أخرى تعتمد نماذج السلاسل الزمنية العشوائية على ماضي أو تاريخ السلسلة $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$ أو على الاضطرابات التي حدثت في الماضي $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$ أو على هذين النوعيين من المتغيرات كمتغيرات مفسرة. ومن ثم تتضمن هذه النماذج ثلاث مجموعات رئيسية من النماذج. المجموعة الأولي وتعرف بنماذج الانحدار الذاتي، وهي من أنواع الانحدار الخطي الذي تلعب فيه المتغيرات $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$ دور المتغيرات المفسرة التي تؤثر على المتغير التابع وتقود النظام y_t موضع الدراسة. وأبسط هذه النماذج هو نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى والذي يمكن كتابته على الصورة الآتية.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad ; \quad t = 1, 2, \cdots, n \tag{3.2.1}$$

وقد يبدو للقارئ من أول وهلة أن هذا النظام عند الوحدة الزمنية t يعتمد على الاضطراب أو المتغير ε_t فقط ولا يعتمد على الاضطرابات التي حدثت في الماضي، ولكن بمزيد من الفحص والدراسة سرعان ما يتضح أن حالة هذا النظام عند الزمن t تتأثر بصورة غير مباشرة بالاضطراب ε_{t-1} الذي حدث عند الوحدة الزمنية السابقة وذلك من خلال اعتماده على المتغير المفسر y_{t-1} الموجود في الطرف الأيمن والذي يمكن كتابته على الصورة

$$y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \quad ; \; t = 2, 3, \cdots, n$$

ومن ثم فإن النظام لا ينسى المتغير العشوائي ε_{t-1} عندما ينتقل من الزمن $(t-1)$ إلى الزمن t. وفي الواقع- كما سنري في هذا الباب بالتفصيل- فإن هذا النظام يتذكر جميع المتغيرات أو الاضطرابات $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$ التي حدثت في الماضي بدرجات متفاوتة. ولذلك ينتمي النموذج (3.2.1) إلى الأنظمة الديناميكية Dynamic Systems

والمجموعة الثانية من نماذج السلاسل الزمنية العشوائية تعرف بنماذج المتوسطات المتحركة Moving averages، وهي نوع من النماذج أكثر تعقيداً من نماذج الانحدار الذاتي والذي يرتبط فيها النظام عند الزمن t بالاضطرابات $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$ التي حدثت في الماضي بشكل مباشر. وبالتالي فإن هذه النماذج لها ذاكرة وتنتمي إلى الأنظمة الديناميكية شأنها في ذلك شأن نماذج الانحدار الذاتي. وأخيراً فهناك المجموعة الثالثة وهى تضم مجموعة النماذج العشوائية المختلطة والتي تظهر ديناميكية مباشرة من خلال الاعتماد على الاضطرابات $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$ وديناميكية غير مباشرة من خلال الاعتماد على ماضي أو تاريخ السلسلة $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$.

3.3 العمليات العشوائية الخطية Linear Stochastic Processes

تتفق النماذج الديناميكية – السابق الحديث عنها في المبحث السابق- في وجود نمط معين من الارتباط الذاتي بين مفردات السلاسل الزمنية التي تنتمي إلى العمليات التي تتبع في سلوكها مثل هذه النماذج، وقد يسبب هذا صعوبات كثيرة في التعامل مع مثل هذه السلاسل خاصة إذا كانت معاملات الارتباط الذاتي كبيرة. وقد حدا هذا بالعلماء إلى البحث في دراسة مثل هذه العمليات بواسطة عمليات أخرى أولية بسيطة الخصائص. وقد لاحظ يوول Yule في العشرينات من القرن العشرين أن مثل هذه السلاسل يمكن تمثيلها كتوليفة خطية في متتابعة sequence من المتغيرات العشوائية غير المرتبطة. وقد صاغ ووالد Wold هذه الفكرة في نظريته للتجزيء في الثلاثينات من القرن العشرين والتي أثبت فيها أن كل عملية عشوائية ساكنة (بالمعنى الضعيف)

يمكن التعبير عنها في شكل توليفة خطية (مرشح خطي) لمتتابعة من المتغيرات العشوائية غير المرتبطة لها توقع صفر وتباين ثابت σ^2. وبذلك يمكن النظر إلى السلسلة موضع الدراسة إلى أنها سلسلة ولدت بواسطة متتابعة من الاضطرابات العشوائية $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$ غير المرتبطة توقعها الصفر وتباينها قيمة ثابتة σ^2. وهذه المتتابعة أو العملية الأولية $\{\varepsilon_t\}$ قد حولت بواسطة دالة أو مرشح خطي Linear Filter إلى العملية $\{y_t\}$ والتي تنتمي إليها السلسلة $y_1, y_2, \cdots, y_n$ التي بين أيدينا كما هو موضح في الشكل.

$$\varepsilon_t \rightarrow \boxed{\text{مرشح خطي}} \rightarrow y_t$$

شكل (1): تمثيل السلاسل الزمنية كمخرجات للاضطرابات الهادئة

تعريف:

العملية العشوائية $\{y_t\}$ هي عملية خطية متقطعة discrete إذا أمكن التعبير عنها في الصورة

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots \ ; \ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (3.3.1)$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية "اضطرابات هادئة" والتي سبق تعريفها في الباب السابق، μ مقدار ثابت و $\{\psi_i\}$ متتابعة من القيم الثابتة

وتكون العملية $\{y_t\}$ ساكنة إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:

1. الثوابت $\psi_1, \psi_2, \cdots$ تكون منتهية finite

2. الثوابت $\psi_1, \psi_2, \cdots$ تكون غير منتهيةinfinite ولكنها تقاربيه وتحقق الشرط الهام $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ و الذي يضمن أن يكون تباين العملية محدود

ويعنى هذا أن السلسلة $\{y_t\}$ تكون ساكنة إذا كانت الثوابت $\{\psi_t\}$ تقاربية وتحقق الشرط $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. وإذا كانت العملية $\{y_t\}$ ساكنة فإن الثابت μ يمثل متوسط السلسلة، أما إذا كانت العملية غير ساكنة فإن الثابت μ يكون مجرد نقطة أصل معينة أو نقطة مرجعية. ومن الآن فصاعداً سنفترض أن $\mu = 0$ دون فقدان عمومية المناقشة، فإذا كانت μ لا تساوى الصفر فإننا سنفترض أن y_t تمثل السلسلة الأصلية بعد طرح الثابت μ. ولمزيد من التفاصيل حول العمليات الخطية يمكن للقارئ الرجوع إلى Box-Jenkin(1976) أو Priestely (1981).

3.3.1 حالات خاصة

جميع النماذج التي سندرسها في هذا الباب والفصول القادمة تعتبر حالات خاصة بشكل أو بآخر من النموذج الخطي العام (3.3.1) ومن النماذج الخاصة جداً يمكن تمييز العمليات الهامة الآتية:

1- إذا كان $\psi_j = \phi^j \;;\; j \geq 1 \;;\; |\phi| < 1$ **نحصل على النموذج**

$$y_t = \varepsilon_t + \phi\, \varepsilon_{t-1} + \phi^2\, \varepsilon_{t-2} + \phi^3\, \varepsilon_{t-3} \cdots$$

وتعرف هذه العمليات بعمليات المتوسطات المتحركة من رتبة لا نهائية ويشار إليها بالرمز $MA(\infty)$. ويمكن إعادة التعبير عن هذه العمليات في صورة أبسط كما يلي

$$y_t = \varepsilon_t + \phi[\varepsilon_{t-1} + \phi\, \varepsilon_{t-2} + \phi^2\, \varepsilon_{t-3} \cdots]$$

أي أن

$$y_t = \varepsilon_t + \phi\, y_{t-1} \qquad (3.3.2)$$

والصورة (3.3.2) تعرف في الأوساط العلمية بعمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى ويشار إليها بالرمز $AR(1)$، وهذه العمليات ساكنة إذا كان $|\phi| < 1$ وذلك لأن في هذه الحالة نجد أن

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = 1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots = \frac{1}{1-\phi^2} < \infty$$

2- عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية والتي يمكن أن تكتب على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1\, y_{t-1} + \phi_2\, y_{t-2}$$

ويمكن الحصول على هذه العمليات من العمليات الخطية العامة (3.3.1) وذلك باختيار الثوابت ψ_j بشكل معين. وتوضع شروط معينة على الثابتين $\phi_1\ ,\phi_2$ لكي تكون هذه العمليات ساكنة، ويشار إلى هذه العمليات بالرمز $AR(2)$.

3- إذا كان $\psi_1 = -\theta_1;\ \psi_j = 0\ ,\ j > 1$ **نحصل على النموذج**

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\, \varepsilon_{t-1} \qquad (3.3.3)$$

ويطلق على العمليات (.4.3.3) بعمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى ويشار إليها بالرمز $MA(1)$. وهذه العمليات دائمًا ساكنة بغض النظر عن قيمة الثابت θ وذلك لأن عدد الثوابت ψ_j محدود في هذه العمليات

4- إذا كان $\psi_1 = -\theta_1;\ \psi_2 = -\theta_2;\ \psi_j = 0,\ j > 2$ **نحصل على النموذج**

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1\, \varepsilon_{t-1} - \theta_2\, \varepsilon_{t-2}$$

وتعرف هذه العمليات في الأعراف العلمية بعمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية ويشار إليها بالرمز $MA(2)$، وهي عمليات دائمًا ساكنة بغض النظر عن قيمتي الثابتين $\theta_1,\ \theta_2$.

من العمليات الخاصة السابق ذكرها يتضح أنه يمكن التعبير عن أي عملية خطية ساكنة في شكلين أساسيين. الشكل الأول ويعرف عادة بصيغة الانعكاس invertibility formula والشكل الثاني ويعرف عادة بصيغة الاضطرابات الهادئة white noise formula، ونقدم فيما يلي عرضًا مبسطًا لهاتين الصيغتين والعلاقة التي تربط بينهما.

3.3.2 صيغة الانعكاس Invertibility Formula

تحت شروط معينة – سندرسها فيما بعد– يمكن التعبير عن العمليات الخطية العامة (3.3.1) كمجموع مرجح لتاريخ أو ماضي السلسلة $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$ بالإضافة إلى الاضطراب الحالي ε_t. وتعرف هذه الصيغة أحيانًا بصيغة أوزان باي weights π وتأخذ الشكل الأتي

$$y_t = \varepsilon_t + \pi_1\, y_{t-1} + \pi_2\, y_{t-2} + \cdots \qquad (3.3.4)$$

ويمكن كتابة هذه الصيغة أيضاً على الصورة المختصرة الآتية

$$(1 - \pi_1\, B - \pi_2\, B^2 - \cdots)\, y_t = \varepsilon_t$$

أي أن

$$\pi\,(B)\, y_t = \varepsilon_t \qquad (3.3.5)$$

حيث

$$\pi\,(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots$$

$$\pi\,(B) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i B^i$$

وتمثل الثوابت $\pi_1, \pi_2, \cdots$ الأوزان أو الأهميات التي تعطى للمتغيرات التي تعبر عن ماضي العملية $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$. وإذا كان عدد الحدود غير الصفرية محدود نحصل على ما يعرف بنماذج الانحدار الذاتي من رتبة معينة مثل عمليات AR(1) وعمليات AR(2)، وهي عمليات قد تكون ساكنة أو غير ساكنة كما سنري فيما بعد.

3.3.3 صيغة الاضطرابات الهادئة White Noise Formula

وهي الصيغة التي سبق تقديمها بالصورة (3.3.1)، وتأخذ شكل مجموع مرجح من الاضطرابات الحالية والماضية $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$ التي يتعرض لها النظام. ويمكن كتابة هذه الصيغة على الصورة المختصرة (وذلك بافتراض أن $\mu = 0$)

$$y_t = \psi(B)\ \varepsilon_t \tag{3.3.6}$$

حيث

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots$$

$$\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \qquad ; \ \psi_0 = 1$$

وتمثل الثوابت $\psi_1, \psi_2, \cdots$ في الصيغة (3.3.6) الأوزان أو الأهميات التي تعطى للاضطرابات الماضية $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$. وتعرف هذه الصيغة أحياناً بصيغة أوزان إبساى ψ weights. وإذا كان المجموع المرجح يتكون من عدد محدود من الحدود غير الصفرية، فإننا نحصل على ما يعرف بعمليات المتوسطات المتحركة من رتبة معينة مثل عمليات MA(1) وعمليات MA(2). وتعرف كثيرة الحدود $\psi(B)$ بدالة التحويل transfer function أو المرشح الخطي linear filter الذي يربط العملية العشوائية $\{y_t\}$ بعملية الاضطرابات الهادئة $\{\varepsilon_t\}$. وينظر إلى دالة $\psi(B)$ كدالة

لتوليد الثوابت ψ_j لأن معامل B^j في مفكوك $\psi(B)$ يمثل الأوزان ψ_j ويقال أن المرشح $\psi(B)$ مستقر stable إذا كانت العملية $\{y_t\}$ ساكنة

ويمكن معرفة العلاقة بين كثيرتي الحدود $\psi(B)$ ، $\pi(B)$ وذلك بالتعويض عن ε_t من (3.3.5) في (3.3.6) نصل إلى

$$y_t = \psi(B)\,\pi(B)\,y_t$$

ومن ثم فإن

$$\psi(B)\,\pi(B) = 1$$

وبالتالي فإن

$$\pi(B) = \psi^{-1}(B)$$

وذلك بافتراض وجود $\psi^{-1}(B)$

مثال (1):

إذا كان $y_t = \varepsilon_t + 0.5\ y_{t-1}$ أوجد أول ثلاثة أوزان π وأول ثلاثة أوزان ψ

الحـــل:

بالنسبة للأوزان π نجد أن

$$y_t = \varepsilon_t + 0.5\ y_{t-1}$$

بمقارنة هذه الصيغة بصيغة الانعكاس (3.3.4) نصل إلى

$$\pi_1 = 0.5 \quad ; \ \pi_2 = \pi_3 = 0$$

بالنسبة للأوزان ψ نجد أن

$$y_t = \varepsilon_t + 0.5\ y_{t-1} \qquad (i)$$

$$y_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + 0.5\ y_{t-2} \qquad (ii)$$

$$y_{t-2} = \varepsilon_{t-2} + 0.5\ y_{t-3} \qquad (iii)$$

$$y_{t-3} = \varepsilon_{t-3} + 0.5\ y_{t-4} \qquad (iv)$$

بالتعويض من (ii) في (i) نصل إلى

$$y_t = \varepsilon_t + 0.5\ [\varepsilon_{t-1} + 0.5\ y_{t-2}]$$

$$y_t = \varepsilon_t + 0.5\ \varepsilon_{t-1} + (0.5)^2\ y_{t-2} \qquad (v)$$

بالتعويض من (iii) في (v) نصل إلى

$$y_t = \varepsilon_t + 0.5\ \varepsilon_{t-1} + (0.5)^2\ \varepsilon_{t-2} + (0.5)^3\ y_{t-3} \qquad (vi)$$

بالتعويض من (iv) في (vi) نصل إلى

$$y_t = \varepsilon_t + 0.5\ \varepsilon_{t-1} + (0.5)^2\ \varepsilon_{t-2} + (0.5)^3\ \varepsilon_{t-3} + (0.5)^4\ y_{t-4} \qquad (vi)$$

بمقارنة هذه الصيغة الأخيرة بصيغة الاضطرابات الهادئة (3.3.1) نصل إلى

$$\psi_1 = 0.5 \quad , \psi_2 = (0.5)^2 = 0.25 \quad ; \ \psi_3 = (0.5)^3 = 0.125$$

مثال(2):

إذ كان $y_t = \varepsilon_t - 0.3\ \varepsilon_{t-1}$ أوجد أول ثلاثة أوزان ψ وأول ثلاثة أوزان π

الحـــــــل:

$$y_t = \varepsilon_t - 0.3\ \varepsilon_{t-1}$$

بمقارنة هذه الصورة بالصيغة (3.3.1) نصل إلى

$$\psi_1 = -0.3 \ \ ; \ \ \psi_2 = \psi_3 = 0$$

لإيجاد الأوزان π يجب كتابة النموذج على الشكل

$$\varepsilon_t = y_t + 0.3\ \varepsilon_{t-1} \qquad \text{(i)}$$

وبالتالي فإن

$$\varepsilon_{t-1} = y_{t-1} + 0.3\ \varepsilon_{t-2} \qquad \text{(ii)}$$

$$\varepsilon_{t-2} = y_{t-2} + 0.3\ \varepsilon_{t-3} \qquad \text{(iii)}$$

$$\varepsilon_{t-3} = y_{t-3} + 0.3\ \varepsilon_{t-4} \qquad \text{(iv)}$$

بالتعويض من (ii) في (i) نصل إلى

$$\varepsilon_t = y_t + 0.3\ [\, y_{t-1} + 0.3\ \varepsilon_{t-2}]$$

$$\varepsilon_t = y_t + 0.3\ y_{t-1} + (0.3)^2\ \varepsilon_{t-2} \qquad \text{(v)}$$

بالتعويض عن ε_{t-2} من (iii) في (v)

$$\varepsilon_t = y_t + 0.3\ y_{t-1} + (0.3)^2\ y_{t-2} + (0.3)^3\ \varepsilon_{t-3} \qquad \text{(vi)}$$

بالتعويض عن ε_{t-2} من (iv) في (vi)

$$\varepsilon_t = y_t + 0.3\ y_{t-1} + (0.3)^2\ y_{t-2} + (0.3)^3\ y_{t-3} + (0.3)^4\ \varepsilon_{t-4}$$

ومن ثم فإن

$$y_t = \varepsilon_t - 0.3\ y_{t-1} - (0.3)^2\ y_{t-2} - (0.3)^3\ y_{t-3} - (0.3)^4\ \varepsilon_{t-4}$$

بمقارنة هذه الصورة الأخيرة بصيغة الانعكاس (3.3.4) نصل إلى

$$\pi_1 = -0.3\ \ ; \pi_2 = -(0.3)^2\ ;\ \pi_3 = -(0.3)^3$$

3.4 عمليات الانحدار الذاتي Autoregressive Processes

ذكرنا في المبحث الثالث من هذا الباب أن أي عملية خطية قابلة للانعكاس يمكن التعبير عنها في الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i\ y_{t-i}\quad ;\quad \sum_{i=1}^{\infty} |\pi_i| < \infty$$

وفي حقيقة الأمر أن الكثير من الظواهر السكانية والاقتصادية والبيئة والهندسية وغيرها يمكن تمثيلها بنفس الصورة السابقة ولكن باستخدام عدد محدد من الثوابت π_i كالآتي

$$y_t = \varepsilon_t + \pi_1\ y_{t-1} + \pi_2\ y_{t-2} + \cdots \pi_p\ y_{t-p}\ ;\ \ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (3.4.1)$$

ويقال للعمليات التي يمكن إخضاع نظامها للشكل (3.4.1) بعمليات الانحدار الذاتي Autoregressive من الرتبة p، وقد جرت الأعراف الإحصائية في مجال السلاسل الزمنية على كتابة هذه العمليات في صورة نموذج خاص بمعلمات معينة تميزها عن غيرها من العمليات وهي

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1\ y_{t-1} + \phi_2\ y_{t-2} + \cdots + \phi_p\ y_{t-p}\ ;\ \ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (3.4.2)$$

كما جرت الأعراف الإحصائية على الإشارة إلى هذه العمليات بالرمز AR(p) وتكتب أحياناً $y_t \sim AR(p)$. وتسمي الثوابت $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p$ بالمعالم الرئيسية

للنموذج أو معاملاته. وتحقق هذه النماذج شروط الانعكاس دائمًا لأن عدد حدود π_i غير الصفرية محدود حيث إن

$$\pi_1 = \phi_1 \,;\, \pi_2 = \phi_2 \,;\cdots;\;\; \pi_p = \phi_p \;\;;\; \pi_i = 0,\; i > p$$

لأي قيمة محدودة للرتبة p. وهذه العمليات قد تكون ساكنة أو غير ساكنة، ويعتمد سكون هذه العمليات على قيم المعالم $\phi_1 , \phi_2 ,\cdots, \phi_p$. وعادة ما تكون $p \le 2$ في معظم التطبيقات التي تنشأ في الاقتصاد والإنتاج والسكان والبيئة وغيرها، ولكن قد تكون $p > 2$ في بعض التطبيقات خاصة تلك التي تستخدم فيها هذه النماذج كتقريب لعمليات أخري مثل عمليات المتوسطات المتحركة. ولذلك سنركز دراستنا في هذا المبحث على عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى والرتبة الثانية ونكتفي بذكر الملاحظات العامة للعمليات ذات الرتب الأعلى.

3.4.1 عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى

تأخذ النماذج التي تعكس نظام هذه العمليات شكل معادلة انحدار لقيمة السلسلة عند الزمن t أي y_t على قيمة السلسلة عند الزمن (t-1) بالإضافة إلى الاضطراب الحالي ε_t. أي أنه يمكن كتابة نماذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى – والتي يشار إليها بالرمز AR(1)– على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi\, y_{t-1} \quad ; \; t = 0, \pm 1, \pm 2 ,\cdots \qquad (3.4.3)$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية اضطرابات هادئة و ϕ مقدار ثابت يمثل معلمة النموذج الرئيسية. وعادة ما يفترض أن $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس هذا يعني أن $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0,\sigma^2)$. وعمليات AR (1) تحقق دائمًا شروط الانعكاس بغض النظر عن قيمة المعلمة ϕ وذلك

لأن $\pi_1 = \phi;\ \pi_i = 0,\ i > 1$ ، أي أن عدد حدود π_i غير الصفرية محدود. ويمكن كتابة النموذج (3.4.3.) على الصورة

$$\phi(B)\, y_t = \varepsilon_t$$

حيث

$$\phi(B) = 1 - \phi\ B$$

وتسمي كثيرة الحدود $\phi(B)$ بمؤثر الانحدار الذاتي autoregressive operator.

شروط السكون

وربما أول ما يتبادر إلى الذهن بعد تعريف عمليات AR (1) هو الاستفسار عن شروط سكون هذه العمليات أو بمعنى آخر الاستفسار عن الشروط التي يجب أن تتوافر لكي نستطيع أن نعبر عن هذه العمليات بصيغة الاضطرابات الهادئة (3.3.1) السابق دراستها. وللرد على هذا الاستفسار يمكن أن نعبر عن المشاهدات الماضية $y_{t-1}\ y_{t-2},\cdots$ في صورة الاضطرابات الماضية من العلاقة (3.4.3) كما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} y_{t-1} = \phi\, y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \\ y_{t-2} = \phi\, y_{t-3} + \varepsilon_{t-2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \vdots \\ y_{t-k} = \phi y_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k} \end{array}\right\} \tag{3.4.4}$$

بالتعويض عن y_{t-1} من (3.4.4) في (3.4.3) نصل إلى

$$y_t = \varepsilon_t + \phi[\phi\, y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}]$$

$$y_t = \varepsilon_t + \phi\, \varepsilon_{t-1} + \phi^2\, y_{t-2} \tag{3.4.5}$$

بالتعويض عن y_{t-2} مرة أخرى من (3.4.4) في (3.4.5) نصل إلى

$$y_t = \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \phi^3 y_{t-3}$$

وبتكرار هذه العملية k من المرات نصل إلى

$$y_t = \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \phi^3 \varepsilon_{t-3} + \cdots + \phi^{k-1} \varepsilon_{t-k+1} + \phi^k y_{t-k}$$

$$y_t = \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j \varepsilon_{t-j} + \phi^k y_{t-k} \qquad (3.4.6)$$

إذا كانت $|\phi| < 1$ وسمحنا بتكرار هذه العملية عدد كبير من المرات أي السماح لعدد المرات k أن يؤول إلى ∞ (أي $k \to \infty$) فإن الحد الأخير في (3.4.6) سيؤول إلى الصفر، ومن ثم يمكن كتابة النماذج AR (1) على الصورة الآتية

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} \quad ; \quad |\phi| < 1$$

وبمقارنة هذه الصيغة بصيغة الاضطرابات الهادئة (3.3.1) نجد أن

$$\psi_j = \phi^j , \quad j = 1, 2, \cdots \qquad ; |\phi| < 1$$

أما إذا كانت $|\phi| \geq 1$ فإن الحد الأخير في (3.4.6) لا يتلاشى ومن ثم لا يمكن التعبير عن نماذج AR(1) باستخدام الاضطرابات الهادئة فقط. والآن نستطيع الرد على الاستفسار المطروح بالقول بأن عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى تكون ساكنة إذا كانت $|\phi| < 1$.

دالة جرين Green Function

عادة ما يطلق على الأوزان ψ_j التي تعطى للاضطرابات ε_{t-j} في نماذج الانحدار الذاتي بدالة جرين Green function وتلعب هذه الدالة دورًا هامًا في وصف الذاكرة الديناميكية لنماذج السلاسل الزمنية بصفة عامة ونماذج الانحدار الذاتي بصفة خاصة. فهذه الدالة توضح كيفية تأثر النظام أو الظاهرة y_t بالاضطرابات

$\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$ أي الكيفية التي يتذكر بها النظام الاضطرابات التي تعرض لها النظام في الماضي. فالوزن ψ_3 على سبيل المثال يمثل الوزن الذي يعطى للاضطراب ε الذي التحق بالنظام قبل الزمن الحالي بثلاث وحدات زمنية أي المتغير العشوائي الذي التحق بالنظام عند الزمن (t-3). وبصفة عامة يمثل الوزن ψ_j الوزن الذي يعطى للاضطراب ε الذي التحق بالنظام قبل الزمن الحالي بعدد j من الوحدات الزمنية أي الاضطراب الذي التحق بالنظام عند الزمن(t-j). ففي نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى وجدنا أن $\psi_j = \phi^j, j=1,2,\cdots; |\phi|<1$ وبزيادة قيمة ϕ تزيد قدرة النظام على تذكر ε_{t-j} أي تزيد قدرة النظام على تذكر الاضطرابات التي حدثت في الماضي. فإذا كانت $\phi = 0.8$ على سبيل المثال فإن الوزن الذي يعطى للمتغير ε_{t-4} يساوي 0.41 وهي قيمة كبيرة نسبيًا، وهذا يعني أن النظام مازال يتذكر الاضطراب الذي حدث منذ أربع وحدات زمنية. أما إذا كانت $\phi = 0.2$ فإن الوزن الذي يعطى للمتغير ε_{t-4} يساوي 0.0016 أي أن النظام قد نسي الاضطراب ε_{t-4} تقريبًا. وتحدد دالة جرين ψ_j السرعة التي يعود بها النظام إلى حالة التوازن. فإذا كانت قيمة ϕ صغيرة فإن النظام يعود بسرعة إلى حالة التوازن بعد التحاق ε_t بالنظام، أما إذا كانت قيمة ϕ كبيرة فإن النظام يعود ببطء إلى حالة التوازن. وبصفة عامة يمكن القول أن النظام يعود بعد عدد كاف من الوحدات الزمنية إلى وضع التوازن إذا كانت $|\phi|<1$ ويقال أن الأنظمة أو العمليات العشوائية ساكنة إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{j\to\infty} \psi_j \to 0$$

ومن ثم فإن العمليات AR (1) تكون ساكنة إذا وفقط إذا كانت $|\phi|<1$

وفي الواقع يمكن التعبير عن شرط السكون لعمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى بشكل أكثر عمومية وذلك بفحص الدالة المميزة $\phi(B) = 1-\phi B$. فإذا كانت $|\phi|<1$ فإن جذر المعادلة المميزة $\phi(B)=0$ لابد أن يكون خارج دائرة الوحدة، أي أن $|B|>1$ هو شرط سكون العمليات AR (1). والآن نستطيع دراسة الخصائص

الإحصائية لعمليات AR (1). بـــافتراض ســكون هــذه العلميــات أي بــافتراض أن $|\phi|<1$.

دالة الارتباط الذاتي

يأخذ توقع طرفي المعادلة (3.4.3)

$$E(Y_t) = \phi E(Y_{t-1})$$

وحيث أن العملية ساكنة فإن

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1})$$

وبالتالي فإن

$$E(Y_t)[1-\phi] = 0 \Rightarrow E(Y_t) = 0$$

بأخذ تباين طرفي المعادلة (3.4.3)

$$Var(Y_t) = \phi^2 \, Var(Y_{t-1}) + Var(\varepsilon_t)$$

وحيث أن العملية ساكنة فإن

$$Var(Y_t) = Var(Y_{t-1}) = \gamma(0)$$

وبالتالي فإن

$$\gamma(0)[1-\phi^2] = \sigma^2$$

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \quad ; \quad |\phi|<1$$

التغاير الذاتي عند الفجوة الزمنية الأولي

$$\gamma(1) = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-1})$$

$$\gamma(1) = \phi \, \gamma(0)$$

التغاير الذاتي عند الفجوة الزمنية الثانية

$$\gamma(2) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-2})$$

$$\gamma(2) = \mathrm{Cov}(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-2})$$

$$\gamma(2) = \phi \gamma(1)$$

وبصورة عامة فإن التغاير الذاتي عند الفجوة الزمنية k

$$\gamma(k) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k})$$

$$\gamma(k) = \mathrm{Cov}(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-k})$$

$$\gamma(k) = \phi \gamma(k-1) \quad ; k = 1, 2, \cdots$$

ومن ثم فإن دالة الارتباط الذاتي

$$\rho(k) = \phi \rho(k-1) \quad ; \quad k = 1, 2, \cdots$$

$$\rho(k) = \phi^2 \rho(k-2) = \phi^3 \rho(k-3) = \cdots = \phi^k \rho(0)$$

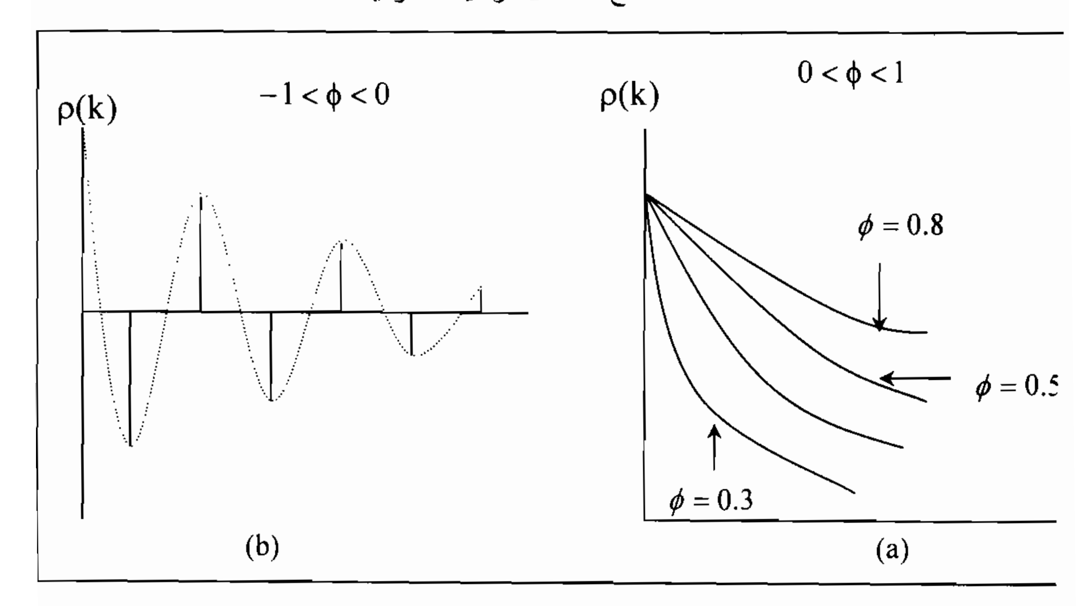
وأخيرًا فإن

$$\rho(k) = \phi^k \quad ; \; k = 1, 2, \cdots ; \quad |\phi| < 1$$

ويعني هذا أن السلسلة تتذكر كل شيء في الماضي أي أن لها ذاكرة لانهائية ولكن هذه الذاكرة تتناقص في شكل أسي بزيادة عمر المشاهدة أي بزيادة الفاصل الزمني بين y_t والمشاهدة y_{t-k}. وفي هذه الحالة فإن.

$$\lim_{k \to \infty} \rho(k) = 0$$

ويمكن تمثيل دالة الارتباط الذاتي لهذه النماذج في شكل (2)



شكل(2): دالة الارتباط الذاتي لعمليات AR(1)

في الشكل (2.a) تتناقص الدالة $\rho(k)$ برتابة – ببطء أو بسرعة تبعًا لقيمة ϕ – في صورة أسية، بينما في الشكل (2.b) حيث تكون قيمة ϕ سالبة فإن $\rho(k)$ تقترب تدريجيًا من الصفر– ببطء أو بسرعة تبعًا لقيمة ϕ – بصورة ترددية بين الموجب والسالب في شكل موجات تحاكي دالة الجيب.

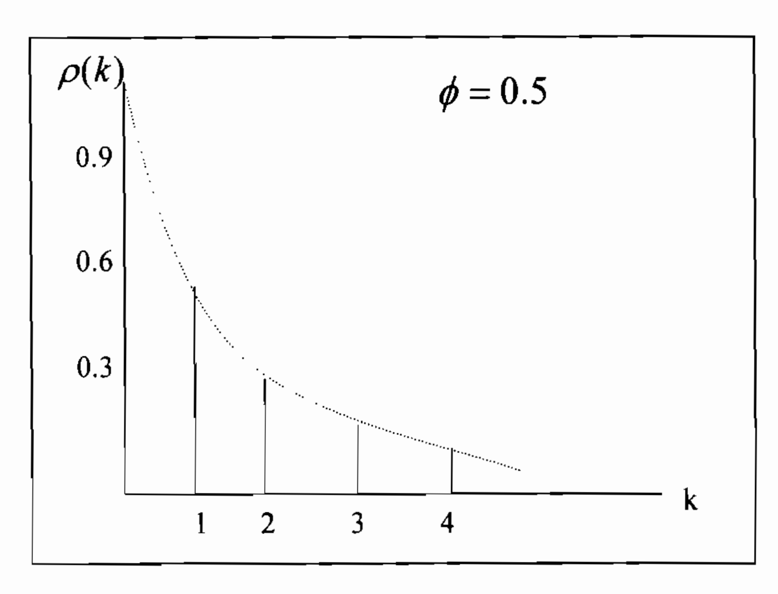
مثال (3):

إذا كانت $\{y_t\}$ عملية انحدار ذاتي من الرتبة الأولى حيث $\phi = 0.5$. أوجد دالة الارتباط الذاتي وارسمها وعلق عليها.

الحـــــل:

$$\rho(k) = \phi^k \;\; ; \;\; k \geq 1$$

$$\rho(1) = 0.5 \quad ; \ \rho(2) = 0.25 \ ; \ \rho(3) = 0.125 \ ; \ \rho(4) = 0.0625 \ ; \cdots$$



شكل(3): دالة الارتباط الذاتي لمثال (3)

ويلاحظ أن دالة الارتباط الذاتي في شكل (3) تتناقص بشكل أسي (أو هندسي) بسرعة إلى قيم قريبة من الصفر ولكنها لا تنقطع تمامًا. والتناقص بسرعة دليل على سكون هذه السلسلة والتناقص يزداد كلما اقتربت قيمة ϕ من الصفر.

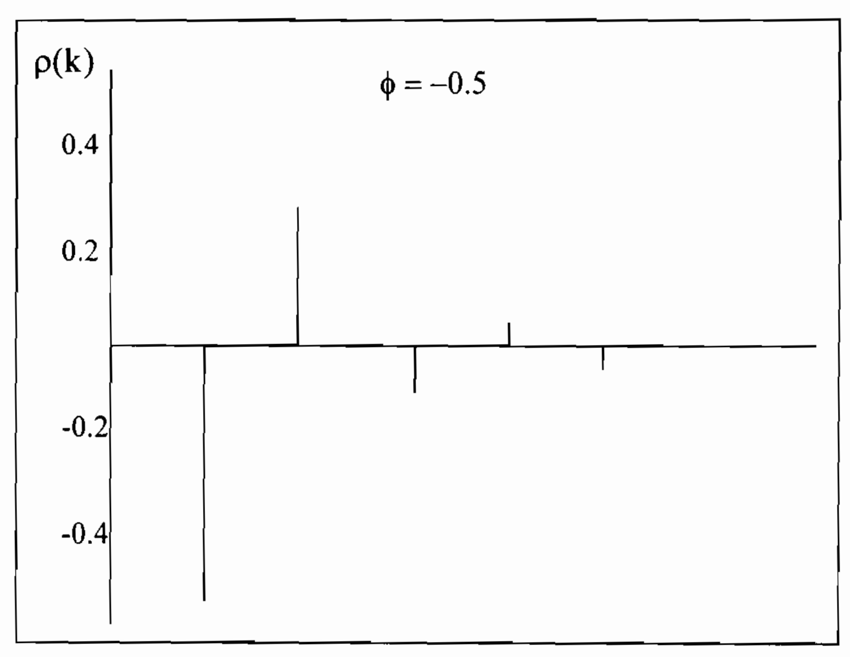
مثال (4):

في المثال السابق احسب دالة الارتباط الذاتي إذا كانت $\phi = -0.5$ ثم ارسم الدالة.

الحــــل:

$$\rho(k) = \phi^k = (-0.5)^k \quad ; \quad k \geq 1$$

$$\rho(1) = -0.5 \ ; \ \rho(2) = 0.25 \ ; \ \rho(3) = -0.125 \ ; \ \rho(4) = 0.0625 \ ; \cdots$$



شكل (4): دالة الارتباط الذاتي لمثال (4)

ويلاحظ أن الدالة $\rho(k)$ في شكل (4) تقترب تدريجيًا من الصفر بسرعة بصورة ترددية بين الموجب والسالب في شكل موجات تحاكي دالة الجيب.

وعمليات الانحدار الذاتي من أكثر العمليات شعبية في التطبيقات لسهولة تفسيرها وتقدير معلماتها والتي يعود الفضل في تقديمها إلى يوول Yule عام 1927. ويمكن اعتبار عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى بمثابة تعميم لسلاسل ماركوف حيث يعتمد النظام عند الزمن t على حالته النهائية عند الزمن (t-1) بالإضافة إلى مركبة عشوائية. فإذا أمكن التعبير عن قيمة الظاهرة عند الزمن t كنسبة معينة من قيمة الظاهرة عند الزمن (t-1) أي $\phi\, y_{t-1}$ (حيث $0<\phi<1$) بالإضافة إلى مركبة عشوائية توقعها مقدار ثابت $\delta = \mu(1-\phi)$ فإنه يمكن التعبير عن قيمة الظاهرة عند الزمن t كالتالي:

$$y_t = \phi\, y_{t-1} + \mu(1-\phi) + \varepsilon_t$$

$$(y_t - \mu) = \phi\,(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \qquad (3.4.7)$$

والصورة (3.4.7) هي الصورة العامة لنماذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى إذا كان $E(Y_t)=\mu$ لا يساوي الصفر. وعلي سبيل المثال قد تمثل y_t عدد سكان دولة معينة عند سنة معينة وبالتالي فإن هذا العدد هو نسبة ϕ (نسبة من بقوا على قيد الحياة) مضروبة في عدد السكان عند السنة الماضية بالإضافة إلى مركبة عشوائية- تتكون من عدد من السكان الجدد – توقعها موجب مثلاً. وكمثال آخر قد يمثل y_t عدد العاطلين عند فصل معين (مثل فصل الخريف)، وهذا العدد يساوي نسبة معينة (نسبة الذين ظلوا عاطلين) ϕ مضروبة في عدد العاطلين عند الموسم السابق (الصيف) بالإضافة إلى مجموعة أخرى عشوائية مكونة من عاطلين جدد يبحثون عن عمل. وبالمثل يمكن تصور عدد الحجاج وعدد المعتمرين في شهر رمضان وعدد السائحين الذين يزورون مصر سنويًا كمتغيرات تتبع في نظامها نماذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى.

دالة الارتباط الذاتي الجزئي

أوضحنا سابقًا أنه يمكن إيجاد دالة الارتباط الذاتي عن طريق نظام يوول والكر كما يلي:

$$\phi_{kk}=\frac{\Delta_k^*}{\Delta}\ ;\ \ k=2,3,\cdots$$

حيث Δ_k^* المحدد المعرف بالمعادلة (2.3.3) في الباب الثاني. وقد أثبتنا في هذا الباب أن دالة الارتباط الذاتي لعمليات $AR\ (1)$ هي $\rho(k)=\phi\,\rho(k-1)$. بالتعويض عن هذه القيمة في العمود الأخير فقط نصل إلى

$$\Delta^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \cdots & \phi \\ \rho(1) & 1 & \cdots & \phi\rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & \cdots & \phi\rho(2) \\ \rho(3) & \rho(2) & \cdots & \phi\rho(3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \cdots & \phi\rho(k-1) \end{bmatrix}$$

بأخذ ϕ عامل مشترك من العمود الأخير نجد أن العمودان الأول والأخير متـشابهان تمامًا وبالتالي فإن قيمة هذا المحدد تساوي الصفر لأي قيمة $k = 2, 3, \ldots$

وبالتالي فإن

$$\phi_{kk} = 0 \ \ ; \ k = 2,3,\cdots$$

وبالتعريف وجدنا أن

$$\phi_{11} = \rho(1)$$

ومن ثم فإن

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho(1) & ; \ k = 1 \\ 0 & ; \ k = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

أي أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي للعمليات AR (1) تنقطع فجأة بعد الفجـوة الزمنية الأولي.

3.4.2 عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية

يقال أن $\{y_t\}$ عملية انحدار ذاتي من الرتبة الثانية إذا أمكن التعبير عنها في الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1 \, y_{t-1} + \phi_2 \, y_{t-2} \ \ ; \ \ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (3.4.8)$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية الاضطرابات الهادئة، و ϕ_1, ϕ_2 ثابتان يمثلان معلمتـــي النمـــوذج، وعادة ما يفترض أن $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس. ويمكن كتابة النمـــوذج (3.4.8) باســـتخدام مؤثر الإزاحة للخلف كالآ تي.

$$\phi(B)\, y_t = \varepsilon_t$$

حيث

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$$

وبافتراض وجود $\phi^{-1}(B)$ يمكن كتابة الصورة (3.4.8) على الشكل

$$y_t = \phi^{-1}(B)\, \varepsilon_t$$

حيث ينظر للمتتابعة $\phi^{-1}(B)$ كمرشح يربط بين ε_t والعملية $\{y_t\}$

وعمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية – والتي يشار إليهـــا اختـــصارًا بـــالرمز AR(2)– قد تكون ساكنة أو غير ساكنة، ويتوقف سكون هذه العمليات على خصائص المرشح $\phi^{-1}(B)$، ومن ثم يجب وضع بعض القيود على المعلمتين ϕ_1, ϕ_2 أو حول المرشح $\phi^{-1}(B)$ لضمان سكون هذه العمليات.

دالة جرين وشروط السكون

يمكن كتابة النماذج AR (2) على الصورة

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\, y_t = \varepsilon_t \qquad (3.4.9)$$

سنفترض أن G_1, G_2 هما جذرا المعادلة

$$B^2 - \phi_1 B - \phi_2 = 0 \qquad (3.4.10)$$

في الواقع توجد علاقة جبرية بسيطة وهامة بين جذري المعادلة (3.4.10) وجـــذري المعادلة المميزة الآتية:

$$1-\phi_1 B-\phi_2 B^2=0 \qquad (3.4.11)$$

هذه العلاقة هي أنه يمكن بسهولة إثبات أنه إذا كان G_1, G_2 هما جـذري المعادلـة (3.4.10) فإن جذري المعادلة (3.4.11) هما G_1^{-1}, G_2^{-1} وبالتالي فإن.

$$1-\phi_1 B-\phi_2 B^2=(1-G_1 B)(1-G_2 B)$$

حيث

$$G_1=\frac{1}{2}[\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}]$$

$$G_2=\frac{1}{2}[\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}]$$

ومن ثم يمكن كتابة (3.4.9) على الصورة

$$y_t=(1-G_1 B)^{-1}(1-G_2 B)^{-1}\varepsilon_t$$

وذلك بافتراض وجود $(1-G_2 B)^{-1},(1-G_1 B)^{-1}$

باستخدام الكسور الجزئية

$$y_t=\left[\frac{G_1}{(G_1-G_2)(1-G_1 B)}+\frac{G_2}{(G_2-G_1)(1-G_2 B)}\right]\varepsilon_t$$

$$y_t=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{G_1^{j+1}}{(G_1-G_2)}+\frac{G_2^{j+1}}{(G_2-G_1)}\right]\varepsilon_{t-j}$$

وبالتالي فإن دالة جرين هي

$$\psi_j=\frac{G_1^{j+1}}{(G_1-G_2)}-\frac{G_2^{j+1}}{(G_1-G_2)} \quad ; \; G_1\neq G_2 \qquad (3.4.12)$$

إذا كان المقدار $\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$ فإن الجذريين G_1, G_2 يكونا حقيقيان real وبالتالي فإن ψ_i تكون الفرق (أو مجموع) دالتين أسيتين. أما إذا كان المقدار $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ فإن الجذرين يكونا مركبان complex وفي هذه الحالة يمكن إثبات أن ψ_j تمثل موجات من دوال الجيب. من (3.4.12) نستطيع القول بأن عمليات AR (2) تكون ســاكنة إذا كان $|G_1|<1 \; ; \; |G_2|<1$ أي أن الشروط الضرورية لسكون عمليات AR(2) هي أن جذري المعادلة المميزة $\phi(B) = 0$ يجب أن يقعا خارج دائرة الوحدة.

مثال (5):

في إحدى عمليات AR (2) كان $\phi_2 = -0.2 \; ; \; \phi_1 = 0.5$. احسب دالة جرين واختبر سكون هذه العملية.

الحـــــل:

$$G_1 = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 + 4(-0.2)}] = 0.724$$

$$G_2 = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 + 4(-0.2)}] = 0.276$$

$$\psi_j = \frac{(0.724)^{j+1}}{(0.724 - 0.276)} - \frac{(0.276)^{j+1}}{(0.724 - 0.276)}$$

$$\psi_j = \frac{(0.724)^{j+1}}{0.448} - \frac{(0.276)^{j+1}}{0.448}$$

$$\lim_{j\to\infty} \psi_j \to 0$$

ومن ثم فالعملية ساكنة

مثال (6):

إذا كانت السلسلة $\{y_t\}$ تتبع النموذج $y_t = 0.8\, y_{t-1} - 0.15\; y_{t-2} + \varepsilon_t$ أوجد جذري المعادلة المميزة ودالة جرين واختبر سكون السلسلة.

الحـــــل:

$$\phi_1 = 0.8 \quad ; \quad \phi_2 = -0.15$$

$$G_1 = \frac{1}{2}\,[0.8 + \sqrt{0.64 - 0.6}] = 0.5$$

$$G_2 = \frac{1}{2}[0.8 - \sqrt{0.64 - 0.6}] = 0.3$$

وبالتالي فإن جذري المعادلة المميزة هما

$$G_1^{-1} = (0.5)^{-1} = 2 \quad ; \quad G_2^{-1} = (0.3)^{-1} = 3.33$$

$$\psi_j = \frac{(0.5)^{j+1}}{0.2} - \frac{(0.3)^{j+1}}{0.2}$$

حيث إن $i = 1,\ 2 \;\; ; \;\; |G^{-1}| > 1$ فالعملية ساكنة. أيضًا واضح أن $\lim\ \psi_j \to 0$

مثال (7):

إذا كانت $\{y_t\}$ عملية (2) AR حيث $\phi_1 = 0.6 \;\; ; \;\; \phi_2 = -0.8$ أوجد جذرى المعادلة المميزة. هل هذه العملية ساكنة؟

الحـــــل:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 1 - 0.6 B + 0.8 B^2 = 0$$

$$(1 - 0.2 B)(1 - 0.4 B) = 0$$

$$G_1^{-1} = (0.2)^{-1} = 5 > 1 \quad ; \quad G_2^{-1} = (0.4)^{-1} = 2.5 > 1$$

ومن ثم فالعملية ساكنة

مثال (8) :

في إحدى عمليات AR (2) كـــان $\phi_1 = 2.4 \; ; \; \phi_2 = -0.8$ أوجـــد جـــذري المعادلة المميزة واختبر سكون هذه العملية.

الحـــــل:

$$1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 1 - 2.4 B + 0.8 B^2 = 0$$

$$(1 - 2 B)(1 - 0.4 B) = 0$$

$$G_1^{-1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad G_2^{-1} = 2.5$$

أحد الجذرين أقل من الواحد وبالتالي فالعملية غير ساكنة.

مثال (9):

في إحدى عمليات AR (2) كان $\phi_1 = 1 \; ; \; \phi_2 = -0.5$ أوجد جذري المعادلة المميزة واختبر سكون العملية.

الحـــــل:

المعادلة المميزة

$$1 - B + 0.5\ B^2 = 0$$

$$G_i^{-1} = 1 \pm \sqrt{1 - 4\,(0.5)} = 1 \pm \sqrt{-1}$$

$$G_i^{-1} = 1 \pm i = a + bi$$

$$G_1^{-1} = 1 + i \ ;\ G_2^{-1} = 1 - i$$

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = (1+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$|\,G_1^{-1}\,| = |\,G_2^{-1}\,| = \sqrt{2} > 1$$

وبالتالي فالعملية ساكنة.

وكما نعلم أن كل من جذري المعادلة المميزة هو دالة في معلمتـــي النمـــوذج ϕ_1, ϕ_2، ولذلك فإن أول ما يتبادر إلى الذهن بعد اختبـــار الـــسكون بفحـــص هـــذين الجذرين هو الاستفسار عن إمكانية التعبير عن شرطي سكون عمليات AR(2) بدلالة معلمتي النموذج مباشرة. وفي الواقع أنه يمكن التعبير عن شرطي ســـكون العمليـــات AR(2) في صورة ثلاث شروط أخرى بدلالة المعلمتين ϕ_1, ϕ_2 مباشرة. هذه الشروط هي:

$$\left.\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1 \\ |\phi_2| &< 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.13)$$

وتعني هذه الشروط أن قيم ϕ_1, ϕ_2 يجب أن تقع داخل منطقة مثلثية رؤوسها (1- ,2-), (0, 1), (1- ,2) لكي تكون عمليات AR (2) ساكنة. ولاشتقاق الشروط (3.4.13) نعلم أن:

$$G_1 + G_2 = \phi_1 \qquad (1)$$

$$G_1 G_2 = -\phi_2 \qquad (2)$$

$$|G_1| < 1 \quad ; |G_2| < 1 \qquad (3)$$

من (2)

$$|\phi_2| = |G_1| \; |G_2|$$

بالتعويض من (3)

$$|\phi_2| < 1 \qquad (i)$$

أيضًا

$$G_1(1-G_2) < (1-G_2)$$

وهذا يؤدي إلى

$$(G_1 + G_2) - G_1 G_2 < 1 \qquad (4)$$

بالتعويض من (1) ، (2) في (4)

$$\phi_1 + \phi_2 < 1 \qquad (ii)$$

وبالمثل فإن

$$-(1+G_2) < G_1(1+G_2)$$

وهذا يؤدي إلى

$$-G_1 G_2 - (G_1 + G_2) < 1 \qquad (5)$$

بالتعويض من (1) ,(2) في (5)

$\phi_2 - \phi_1 < 1$ (iii)

الشروط (i), (ii), (iii) تعادل الشروط (3.4.13)، ومن ثم يكون قد تم برهـــان شروط سكون العمليات AR (2) بدلالة المعالم مباشرة.

مثال (10):

إذا كان $y_t = 0.7\, y_{t-1} - 0.2\, y_{t-2} + \varepsilon_t$ هل السلسلة $\{y_t\}$ ســـاكنة؟ اشـــرح سبب إجابتك.

الحـــــل:

$$\phi_2 + \phi_1 = -0.2 + 0.7 = 0.5 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 = -0.2 - 0.7 = -0.9 < 1$$

$$|\phi_2| = 0.2 < 1$$

شروط السكون الثلاثة متحققة ، وبالتالي فإن هذه السلسلة ساكنة.

مثال (11):

إذا كانت $\{y_t\}$ إحدى عمليـــات AR (2) حيـــث $\phi_1 = 1.5$; $\phi_2 = -0.5$. اختبر سكون هذه العملية.

الحـــــل:

$$\phi_2 + \phi_1 = -0.5 + 1.5 = 1$$

الشرط الأول من شروط السكون غير متحقق، ومن ثم فالعملية غير ساكنة .

وقبل أن نختتم الحديث عن دالة جرين أو أوزان ψ تجدر الإشارة إلى أنه في بعض الأحيان قد ينصب الاهتمام على معرفة بعض أوزان ψ الأولى بدلالة المعلمتين ϕ_1 , ϕ_2 مباشرة. وفي مثل هذه الحالات قد يفضل إيجاد هذه الأوزان من العلاقة بين $\pi(B), \psi(B)$ كما يلي

$$\pi(B)\ \psi(B) = 1$$

$$(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2)(1+\psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = 1$$

بمساواة معاملات B^j في الطرفين نصل إلى

$$\psi_1 - \phi_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1$$

$$\psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$$

وبصفة عامة يمكن إثبات أن

$$\psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2\ \psi_{j-2}\ ;\ j \geq 3$$

ومن ثم فإن العمليات AR (2) تكون ساكنة إذا كانت الأوزان ψ_j تتقارب وكان $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$

مثال (12):

في إحدى عمليات AR(2) كان $\phi_1 = 1\ ;\ \phi_2 = -0.5$ أوجد أول أربعة أوزان ψ

الحـــــل:

$$\psi_1 = \phi_1 = 1$$

$$\psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2 = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$\psi_3 = \phi_1 \ \psi_2 + \phi_2 \psi_1 = 1 \ (0.5) - 0.5 \, (1) = 0$$

$$\psi_4 = \phi_1 \ \psi_3 + \phi_2 \psi_2 = 1 \ (0) - 0.5 \, (0.5) = -0.25$$

ونستعرض فيما يلي أهم خصائص عمليات AR(2) الساكنة.

دالة الارتباط الذاتي

بأخذ توقع طرفي المعادلة (3.4.8)

$$E(Y_t) = \phi_1 E(Y_{t-1}) + \phi_2 E(Y_{t-2})$$

بافتراض سكون العملية فإن

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = E(Y_{t-2}) = \mu$$

ومن ثم فإن

$$\mu(1 - \phi_1 - \phi_2) = 0$$

$$\mu = E(Y_t) = 0 \ ; \ \phi_1 + \phi_2 < 1$$

ويمكن حساب التباين كما يلي

$$Var(Y_t) = \gamma(0) = Cov(Y_{t,} \ Y_t)$$

$$\gamma(0) = Cov\,(Y_t, \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma^2 \tag{3.4.14}$$

ودالة التغاير عند الفجوة الزمنية k

$$\gamma(k) = Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t, Y_{t-k})$$

$$\gamma(k) = \phi_1\gamma(k-1) + \phi_2\gamma(k-2) \quad ; \; k \geq 1 \tag{3.4.15}$$

ويلاحظ أن التباين (3.4.14) يعتمد على مجهولين هما $\gamma(1), \gamma(2)$، ولكي نحصل على التباين مباشرة بدلالة المعلمتين ϕ_1, ϕ_2 يجب الحصول على معادلتين أخريتين في $\gamma(1), \gamma(2)$ ونحصل على هاتين المعادلتين بوضع k=1 ثم k=2 في المعادلة (3.4.15) فنحصل على

$$\gamma(1) = \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1) \tag{3.4.16}$$

$$\gamma(2) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(0) \tag{4.4.17}$$

بحل المعادلات(3.4.14)،(3.4.16)،(3.4.17) آنياً نحصل على

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2(1-\phi_2)}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2]}$$

$$\gamma(1) = \frac{\phi_1\gamma(0)}{1-\phi_2}$$

$$\gamma(2) = \gamma(0)\left[\phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2}\right]$$

ومن ثم فإن دالة الارتباط الذاتي

$$\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \quad ; \; |\phi_2| < 1 \tag{3.4.18}$$

$$\rho(2) = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \tag{3.4.19}$$

وبصورة عامة فإن

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) \;\; ; \; k \geq 3 \tag{3.4.20}$$

والمعادلة الأخيرة(3.4.20) معادلة فروق متجانسة من الرتبة الثانية حلها العام هو

$$\rho(k) = A G_1^k + D G_2^k$$

حيث تمثل القيمتان G_1, G_2 جذري المعادلة المساعدة (3.5.10) أما القيمتان A, D فهما ثابتان يمكن تحديدهما من الشرطين الابتدائيين

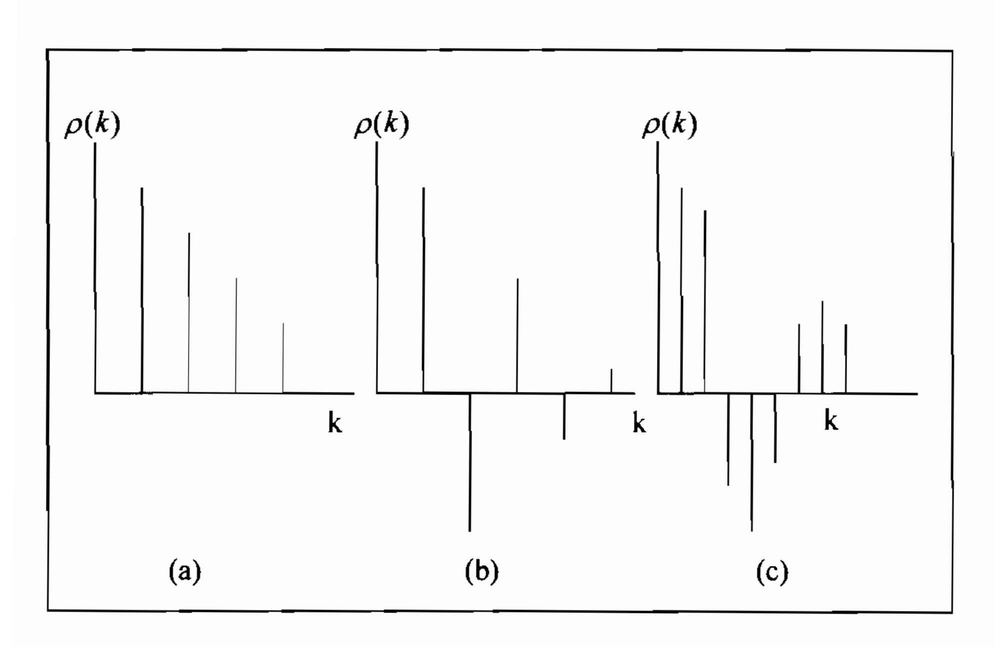
$$\rho(0) = 1 \quad ; \; \rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \quad ; \; |\phi_2| < 1$$

وقد سبق أن وجدنا أن عمليات AR(2) الساكنة يجب أن تحقق الشرطين $|G_i| < 1 \;\; ; \; i = 1, 2$، ومن ثم فإن جذري المعادلة المميزة $\phi(B) = 0$ يجب أن يقعا خارج دائرة الوحدة لكي تكون هذه العمليات ساكنة. وفي هذه الحالة نجد أن

$$\lim_{k \to \infty} \rho(k) = \lim_{k \to \infty} [A G_1^k + D G_2^k] = 0$$

ويعني هذا أن $\rho(k)$ لعمليات AR(2) الساكنة يجب أن تقترب تدريجيًا من الصفر بزيادة الفجوة الزمنية k. وسلوك دالة الارتباط الذاتي لهذه العمليات الساكنة يشبه إلى حد كبير سلوك دالة الارتباط الذاتي في النماذج AR(1) فهي تتناقص في صورة أسية أو تقترب تدريجيًا من الصفر في شكل دالتين أسيتين أو في شكل موجات تحاكي دالة

الجيب، والجدير بالذكر أنه عندما تقترب دالة الارتباط الذاتي في حالة نماذج AR(2) تدريجيًا من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب فإن هذه الموجات تكون أكثر صراحة إذا ما قورنت بنفس الحالة في نماذج AR(1) لأننا هنا قد نحصل على قيمتين موجبتين أو سالبتين متتاليتين أما في حالة نماذج AR(1) فإن التناقض عادة ما يحدث بشكل متردد (متبادل) في الإشارات (انظر شكل (5)).



شكل (5): دالة الارتباط الذاتي لنماذج AR(2)

التشابه بين سلوك دالتي الارتباط الذاتي في حالتي النماذج AR(1) و AR(2) لا يمكن عادة من التمييز بوضوح بين هذين النوعين من النماذج في التطبيقات العملية بالاعتماد فقط على دالة الارتباط الذاتي، ومن ثم يجب أن يكون لدينا أداة أخرى للتمييز بين هذين النوعين من النماذج. هذه الأداة – كما سنرى- هي دالة الارتباط الذاتي الجزئي

دالة الارتباط الجزئي

$$\phi_{11} = \rho(1)$$

من (3.4.18)

$$\phi_{11} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \quad ; \quad |\phi_2| < 1$$

حيث إن

$$y_t = \phi_1 \, y_{t-1} + \phi_2 \, y_{t-2} + \varepsilon_t$$

ويعني هذا أن

$$\phi_{22} = \phi_2$$

$$\phi_{kk} = 0 \quad ; \quad k \geq 3$$

أي أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2} & ; \; k = 1 \\ \phi_2 & ; \; k = 2 \\ 0 & ; \; k = 3, 4, \cdots \end{cases}$$

ومعني هذا أن دالة الارتباط الجزئي لنماذج AR(2) تنقطع فجأة بعد الفجـوة الزمنيـة الثانية. ولذلك فإن هذه الدالة هامة جداً للتمييز بين نماذج AR(1) ونمـاذج AR(2) . وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن إثبات صورة الارتباط الذاتي الجزئي بـشكل رياضـي مباشرة بالتعويض عن $\rho(k)$ من معادلة الفروق (3.4.20) في نظام يـوول بطريقـة مشابهة للطريقة التي استخدمت مع نماذج AR(1) (انظر التمرين (24)).

3.4.3 عمليات الانحدار الذاتي العامة

سبق أن ذكرنا أنه يمكن التعبير عن هذه العمليات على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p}$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية الاضطرابات الهادئة والقيم $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p$ تمثل مجموعة من الثوابت أو معلمات العمليات. ويمكن كتابة هذه العمليات باستخدام مؤثر الانحدار الذاتي العام $\phi(B)$ كما يلي

$$\phi(B)\, y_t = \varepsilon_t$$

حيث

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

وهذه النماذج دائمًا منعكسة بغض النظر عن قيم المعالم $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p$ لأن عدد حدود π_i غير الصفرية محدود. وعمليات نماذج الانحدار الذاتي من الرتبة p– والتي يشار إليها بالرمز AR(p)– قد تكون ساكنة أو غير ساكنة، ويعتمد سكون هذه العمليات على قيم الثوابت $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p$ ويمكن إثبات أن هذه العمليات ساكنة إذا كانت جذور المعادلة $\phi(B) = 0$ تقع كلها خارج دائرة الوحدة. وبالنسبة لدالة الارتباط الذاتي يمكن بسهولة التأكد من أنها تحقق معادلة الفروق الآتية

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \cdots + \phi_p \rho(k-p) \; ; \; k \ge 1$$

ودالة الارتباط الذاتي لنماذج AR(p) الساكنة تتناقص بشكل أسي أو تقترب تدريجيًا من الصفر في شكل توليفة من الدوال الأسية أو في شكل موجات تحاكي دالة الجيب. ولذلك فإن هذه الدالة قد تكون دليل جيد على أن سلسلة معينة من السلاسل الزمنية التي نصادفها في الواقع يمكن تمثيلها في شكل نموذج انحدار ذاتي.ولكنها غير كافية لتحديد رتبة هذا النموذجp. أما بالنسبة لدالة الارتباط الجزئي لهذه النماذج فهي تنقطع تمامًا بعد الرتبة p، ولذلك فهي تلعب دورًا هامًا في تحديد رتبة هذه النماذج في المشاكل العملية. فلو لدينا سلسلة من المشاهدات وكانت دالة الارتباط الذاتي الجزئي

تنقطع (تقريبًا) بعد الفجوة الزمنية الأولي فقد يكون هذا دليل على أن النموذج المناسب لهذه السلسلة هو نموذج AR(1) أما إذا كانت هذه الدالة تنقطع (تقريبًا) بعد الفجوة الزمنية الثانية فإن النموذج المناسب لهذه السلسلة قد يكون نموذج AR(2)،...وهكذا.

3.5 عمليات المتوسطات المتحركة Moving Average Processes

ذكرنا في المبحث السابق أن أي عملية خطية ساكنة يمكن كتابتها على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \ \varepsilon_{t-j} \ ; \quad \sum_j \psi_j^2 < \infty$$

وفي الواقع أن الكثير من الظواهر الطبيعية والاقتصادية والاجتماعية يمكن تمثيلها (ربما بعد أخذ الفروق الأولى أو الثانية) بنفس الصورة الخطية ولكن باستخدام عدد محدود من الثوابت ψ_j كالأتي

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \psi_q \varepsilon_{t-q} \qquad (3.\ 5.1)$$

ويقال للعمليات التي يمكن إخضاع نظامها للنموذج (3.5.1) بعمليات المتوسطات المتحركةMoving Averages من الرتبة q، وقد جرت الأعراف الإحصائية في مجال السلاسل الزمنية على كتابة هذه العمليات في صورة نموذج خاص بمعلمات معينة تميزها عن غيرها من العمليات وهي

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

كما جرى العرف الإحصائي على الإشارة إلى هذه العمليات بالرمز MA(q) وتكتب أحيانًا $y_t \sim MA(q)$، وتسمى الثوابت $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q$ بالمعالم الرئيسية للنموذج. وهذه العمليات دائمًا ساكنة بغض النظر عن قيم المعالم $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta q$ وذلك لأن عدد الحدود غير الصفرية محدود حيث إن

$$\psi_1 = -\theta_1 \;;\; \psi_2 = -\theta_2 \;;\cdots;\; \psi_q = -\theta_q \;;\; \psi_j = 0, \;\; j > q$$

لأي قيمة محدودة للرتبة q. ولكن في بعض الأحيان قد يكون من الضروري التعبير عن النماذج باستخدام ماضي أو تاريخ السلسلة y_{t-1}, y_{t-2} أي باستخدام الصيغة المنعكسة. وفي هذه الحالة يجب أن تحقق المعالم $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q$ شروط معينة مشابهة للشروط التي توضع على معلمات نماذج الانحدار الذاتي لضمان سكونها كما سنرى في هذا الباب. وعادة ما تكون $q \leq 2$ في معظم التطبيقات التي تنشأ في الاقتصاد والإدارة والهندسة والبيئة وغيرها، ولكن قد تكون $q > 2$ في بعض التطبيقات خاصة تلك التي تستخدم فيها نماذج المتوسطات المتحركة كتقريب لعمليات أخري مثل عمليات الانحدار الذاتي. ولذلك سوف تركز دراستنا في هذا المبحث على عمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى والرتبة الثانية ونكتفي بذكر الملاحظات العامة للعمليات ذات الرتبة الأعلى.

3.5.1 عمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى

يقال أن $\{y_t\}$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة الأولى إذا أمكن التعبير عنها في الصورة

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\,\varepsilon_{t-1} \;;\quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (3.5.2)$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية "اضطرابات هادئة" والتي سبق تعريفها في الباب السابق، θ مقدار ثابت يمثل معلمة النموذج الرئيسية وعادة ما يفترض أن $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس، وهذا يعني أن

$$\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$$

وعمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى والتي يشار إليها بالرمز MA(1) من أهم عمليات السلاسل الزمنية- ربما بعد أخذ الفروق الأولى- التي تستخدم في التخزين ومراقبة جودة الإنتاج ونمذجة درجات الحرارة ونسب التلوث والمؤشرات

الاقتصادية الهامة بعد التعرض لهزات فجائية غير عادية سواءً كانت من داخل النظام مثل الاضطرابات العمالية أو من خارج النظام مثل الحروب والكوارث وغيرها. وعمليات MA(1) دائمًا ساكنة بغض النظر عن قيمة المعلمة θ وذلك لأن $\psi_1 = -\theta \; ; \; \psi_j = 0, \; j > 1$ أي أن عدد الحدود غير الصفرية محدود. ويمكن أن يكتب النموذج(3.5.2) على الصورة المختصرة الآتية

$$y_t = \theta(B)\varepsilon_t \tag{3.5.3}$$

حيث

$$\theta(B) = 1 - \theta B$$

ويسمى المرشح الخطي $\theta(B)$ بمؤثر المتوسطات المتحركة والمسئول عن ربط العملية $\{y_t\}$ كمخرجات Outputs بالعملية $\{\varepsilon_t\}$ كمدخلات Inputs. وهذا المرشح هو دالة أو كثيرة حدود في المؤثر B والذي يعامل عند دراسة خصائص هذا النموذج وغيره من النماذج كأي كمية جبرية كما سنرى

دالة الارتباط الذاتي

بأخذ التوقع والتباين لطرفي المعادلة (3.5.2) نصل إلى

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}) = 0 \quad ; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$V(Y_t) = Var(Y_t) = \gamma(0) = V(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})$$

$$\gamma(0) = V(\varepsilon_t) + \theta^2 V(\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2(1+\theta^2) \quad ; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

والتغاير الذاتي عند الفجوة الزمنية الأولى

$$\gamma(1) = Cov(Y_t, Y_{t-1})$$

$$= Cov\,(\varepsilon_t - \theta\,\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta\,\varepsilon_{t-2}\,)$$

$$= -\theta\,\sigma^2$$

والتغاير عند الفجوة الزمنية الثانية

$$\gamma\,(2) = Cov\,(Y_t, Y_{t-2})$$

$$= Cov\,(\varepsilon_t - \theta\,\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} - \theta\,\varepsilon_{t-3}\,) = 0$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$$\gamma\,(3) = \gamma\,(4) = \cdots = 0$$

ومن ثم يمكن كتابة دالة التغاير الذاتي على الصورة

$$\gamma\,(k) = \begin{cases} -\theta\sigma^2 & , \quad k = 0 \\ 0 & , \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

ويلاحظ أن التوقع والتباين والتغاير لهذا العمليات لا تعتمد على الزمن t كما هو متوقع لأن هذه العمليات ساكنة بغض النظر عن قيمة المعلمة θ. وبقسمة دالة التغاير الذاتي $\gamma\,(k)$ على التباين $\gamma\,(0)$ نحصل على دالة الارتباط الذاتي على الصورة

$$\rho\,(k) = \begin{cases} \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & ; \quad k = 1 \\ 0 & ; \quad k = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

أي أن دالة الارتباط الذاتي لعمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولـى تتميـز بميزة فريدة وهي أنها تنقطع فجأة cuts off بعد الفجوة الزمنية الأولى. ولذلك يقال أن لهذه العمليات ذاكرة Memory مقدارها الوحدة، بمعنى أن المشاهدات التي تبعد عـن بعضها البعض وحدة زمنية واحدة تكون مرتبطة، والمشاهدات التي تبعد عن بعـضها البعض أكثر من وحدة زمنية لا تكون مرتبطة. وعندما تكون قيمة θ سالبة فإن قيمة

ρ (1) تكون موجبة وبالتالي فإن القيم الكبيرة للسلسلة تميل أن يتبعها قيمًا كبيرة والقيم الصغيرة للسلسلة تميل أن يتبعها قيمًا صغيرة، وتكون العملية $\{y_t\}$ في هذه الحالة أكثر تمهيدًا من علمية الاضطرابات الهادئة $\{\varepsilon_t\}$ وتزيد درجة تمهيد هذه العمليات كلما اقتربت قيمة θ من -1 ، ويحدث العكس تمامًا لهذه الحقائق إذا كانت قيمة θ موجبة، ومن السهل على القارئ إثبات أن $|\rho(1)| \leq \frac{1}{2}$ لأي قيمة من قيم θ لمثل هذه العمليات (أنظر تمرين رقم (5)).

دالة الارتباط الذاتي الجزئي

اشتقاق الصورة العامة لدالة الارتباط الذاتي الجزئي لنماذج MA (1) أصعب كثيرًا من اشتقاق دالة الارتباط الذاتي لهذه النماذج ويحتاج إلى دراية بحل معادلات الفروق من الرتبة الثانية . والنظرية الآتية تعطي الصورة العامة لدالة الارتباط الذاتي الجزئي لنماذج MA (1).

نظريــــة:

إذا كانت $\{y_t\}$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة الأولى فإن

$$\varphi_{kk} = \frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{[1-\theta^{2(k+1)}]}$$

البرهان:

وجدنا سابقًا أن نظام يوول والكر لإيجاد دالة الارتباط الذاتي الجزئي هو:

$$\rho(j) = \phi_{k1}\,\rho(j-1) + \phi_{k2}\,\rho(j-2) + \cdots + \phi_{kk}\,\rho(j-k) \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots, k$$

وقد أثبتنا في هذا المبحث أن

$$\rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2} \quad ; \ \rho(k) = 0, \ k > 1$$

لنماذج MA (1)، ومن ثم فإن:

$$\varphi_{kk} = \frac{\Delta_k^*}{\Delta_k}$$

حيث

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \rho(1) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(1) & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \rho(1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho(1) & 1 \end{bmatrix}_{kkk} \quad ; \ \rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

وبفك هذا المحدد عن طريق العمود الاول نجد أن

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} - \rho^2(1) \ \Delta_{k-2} \qquad (1)$$

المعادلة (1) معادلة فروق متجانسة من الرتبة الثانية، حلها العام هو:

$$\Delta_k = A\,\lambda_1^k + B\,\lambda_2^k \qquad (2)$$

حيث λ_1, λ_2 هما جذرًا المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 - \lambda + \rho^2(1) = 0 \qquad (3)$$

القيمتان A, B ثابتان يمكن تحديدهما بواسطة أي شرطين ابتدائيين.

من السهل إثبات أن جذري المعادلة (3) هما.

$$\lambda_1 = \frac{1}{1+\theta^2} \; ; \; \lambda_2 = \frac{\theta^2}{1+\theta^2} \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في (2) نصل إلى:

$$\Delta_k = A\left(\frac{1}{1+\theta^2}\right)^k + B\left(\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\right)^k \qquad (5)$$

لدينا الشرطان الابتدائيان الآتيان:

$$\Delta_1 = 1 \; ; \; \Delta_2 = 1-\rho^2(1) = 1 - \frac{\theta^2}{(1+\theta^2)^2} \qquad (6)$$

بالتعويض من (6) في (5) نصل إلى المعادلتين الآتيتين.

$$1 = \frac{A}{1+\theta^2} + B\left(\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\right) \qquad (7)$$

$$1 - \frac{\theta^2}{(1+\theta^2)^2} = A\left(\frac{1}{1+\theta^2}\right)^2 + B\left(\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\right)^2 \qquad (8)$$

بحل المعادلتين (7) و (8) نصل إلى:

$$A = \frac{1}{1-\theta^2} \; ; \; B = -\frac{\theta^2}{1-\theta^2} \qquad (9)$$

بالتعويض عن B, A من (9) في (5) نصل إلى:

$$\Delta_k = \left(\frac{1}{1-\theta^2}\right)\left(\frac{1}{1+\theta^2}\right)^k - \left(\frac{\theta^2}{1-\theta^2}\right)\left(\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\right)^k$$

وفي النهاية نصل إلى

$$\Delta_k = \frac{1}{(1-\theta^2)(1+\theta^2)^k}\,[1-\theta^{2(k+1)}] \qquad (10)$$

وبطريقة مشابهة يمكن إيجاد قيمة Δ_k^* كما يلي

$$\Delta_k^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & 0 & \cdots & \cdots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \rho(1) & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \rho(1) & \cdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho(1) & 0 \end{bmatrix} \;;\; \rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

بفك قيمة المحدد عن طريق العمود لأول نصل إلى

$$\Delta_k^* = -\rho(1)\begin{bmatrix} \rho(1) & 0 & \cdots & \vdots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & \rho(1) & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho(1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^2\rho^2(1)\begin{bmatrix} 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \rho(1) \\ \rho(1) & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \rho(1) & 0 \end{bmatrix}$$

وبتكرار هذه العملية نصل إلى

$$\Delta_k^* = (-1)^{k-1}\rho^k(1) = -\frac{\theta^k}{(1+\theta^2)^k} \qquad (11)$$

بقسمة (11) على (10) نصل إلى

$$\phi_{kk} = \frac{\Delta_k^*}{\Delta k} = \frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{[1-\theta^{2(k+1)}]} \quad ; \quad |\theta| < 1 \qquad (12)$$

وبهذا يكون قد تم إثبات النظرية

من النظرية السابقة نجد أن

$$|\phi_{kk}| < |\theta^k| \quad ; \quad k = 1, 2, \cdots$$

ويعني هذا أن القيم المطلقة لدالة الارتباط الذاتي لعمليات MA(1) تتناقص ويحدها دالة أخرى تتناقص بشكل أسي. ويلاحظ أن ϕ_{kk} تكون سالبة إذا كـــان $\rho(1) > 0$ أي إذا كانت $\theta > 0$، وتأخذ إشارات تبادلية إذا كان $\rho(1) < 0$ أي إذا كانت $\theta < 0$.

مثال (13)

إذا كانت $\{y_t\}$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة الأولى بمعلمـــة $\theta = 0.5$. أوجد دالة الارتباط الذاتي الجزئي لهذه العملية وارسمها وبين أنه يوجد دالة أسية تحد القيمة المطلقة لدالة الارتباط الذاتي الجزئي.

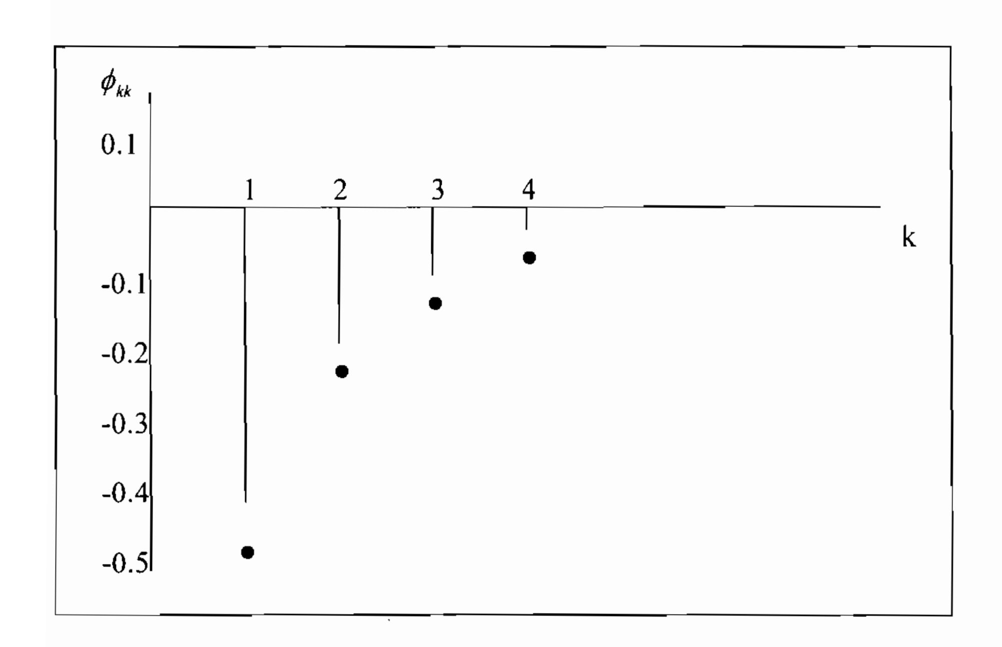
الحـــــــل:

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta^k\,(1-\theta^2)}{[1-\theta^{2(k+1)}]} \quad ; \quad k = 1, 2, \cdots$$

$$\phi_{11} = -0.4 \;;\quad \phi_{22} = -0.191 \;;\quad \phi_{33} = -0.094 \;;\quad \phi_{44} = -0.0469$$

اعتبر الدالة الأسية $-\theta^k = -(0.5)^k$

k	1	2	3	4
ϕ_{kk}	**-0.4**	**-0.191**	**-0.094**	**-0.0469**
$-\theta^k$	**-0.5**	**-0.25**	**-0.125**	**-0.0625**
$\|\phi_{kk}\|$	**0.4**	**0.191**	**0.094**	**0.0469**
$\|\theta^k\|$	**0.5**	**0.25**	**0.125**	**0.0625**



شكل (6): دالة الارتباط الذاتي الجزئي للمثال (13)

واضح أن $|\phi_{kk}|$ يحدها الدالة الأسية $(0.5)^k$.

مثال (14)

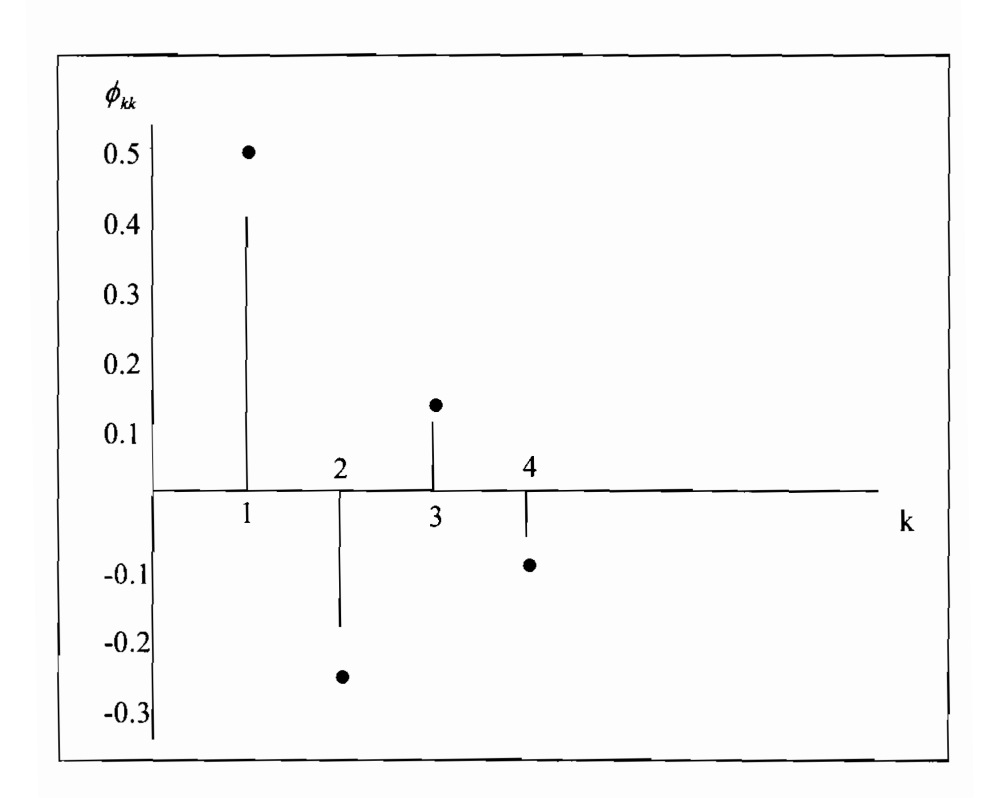
حل المثال (13) إذا كانت $\theta_1 = -0.5$.

الحـــــل:

$$\phi_{11} = 0.4 \;;\quad \phi_{22} = -0.191 \;;\quad \phi_{33} = 0.094 \;;\quad \phi_{44} = -0.0469$$

اعتبر الدالة الأسية ذات الإشارات المتبادلة $-\theta^k = -(-0.5)^k$

k	1	2	3	4
ϕ_{kk}	0.4	-0.191	0.094	-0.0469
$-\theta^k$	0.5	-0.25	0.125	-0.0625
$\lvert\theta^k\rvert$	0.5	0.25	0.125	0.0625



شكل (7): دالة الارتباط الذاتي الجزئي للمثال (14)

واضح أن $|\phi_{kk}|$ يحدها الدالة الأسية $(0.5)^k$

الانعكاس Invertibility

أوضحنا سابقًا أنه تحت شروط معينة يمكن التعبير عن العمليات الخطية الساكنة بدلالة ماضي أو تاريخ السلسلة $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$ أو ما اصطلح على تسميته بـصيغة الانعكاس أو أوزان π، ولكننا لم نتعرض لهذه الشروط بالدراسة أو الذكر. ونتعـرض في السطور التالية لهذه الشروط باختصار مع التطبيـق علـى نمـاذج المتوسـطات المتحركة من الرتبة الأولى والتي أوضحنا أنها دائمًا ساكنة بدون الحاجة إلى وضـع أي قيود أو شروط على المعلمة θ. وفي الواقع أنه يمكن التعبير عن نماذج MA(1) بدلالة ماضي أو تاريخ السلسلة فقط – بالطبع بالإضافة إلى الاضطراب الحالي ε_t – إذا تم وضع بعض الشروط أو القيود على المعلمة θ.

ماهية الانعكاس

لتوضيح مفهوم الانعكاس سنعيد كتابة النموذج MA (1) مـرة أخـرى علـى الصورة

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

والذي يلعب فيه المتغير ε_{t-1} دور المتغير المفسر regressor. وقد يبدو للقارئ لأول وهلة أن هذا النموذج خطي في المعلمة θ، إلا أن الفحص الدقيق لهذا النموذج يثبـت عدم خطيته لأن المتغير المفسر ε_{t-1} – وهو متغير غير مرئي ويكتب أحيانًا $\varepsilon_{t-1}(\theta)$ – يعتمد على المعلمة θ. ولتوضيح ذلك سنعيد كتابة النموذج MA (1) على الشكل

$$\varepsilon_t = y_t + \theta\varepsilon_{t-1} \tag{3.5.4}$$

ومن ثم فإن

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{t-1} &= y_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2} \\ \varepsilon_{t-2} &= y_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-3} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \varepsilon_{t-k} &= y_{t-k} + \theta\varepsilon_{t-k-1} \end{aligned}\right\} \tag{3.5.5}$$

بالتعويض عن ε_{t-1} من (3.5.5) في (3.5.4) نصل إلى

$$\varepsilon_t = y_t + \theta\, y_{t-1} + \theta^2\, \varepsilon_{t-2} \qquad (3.5.6)$$

بالتعويض عن ε_{t-2} من (3.5.5) في (3.5.6)

$$\varepsilon_t = y_t + \theta\, y_{t-1} + \theta^2\, y_{t-2} + \theta^3\, \varepsilon_{t-3}$$

وبتكرار هذه لعملية k من المرات نصل إلى

$$\varepsilon_t = y_t + \theta\, y_{t-1} + \theta^2\, y_{t-2} + \theta^3\, y_{t-3} + \cdots + \theta^k\, y_{t-k} + \theta^{k+1}\, \varepsilon_{t-k-1} \qquad (3.5.7)$$

إذا كانت قيمة $|\theta| < 1$ وسمحنا بتكرار هذه العملية عدد كبير من المــرات أي بالسماح لعدد المرات k أن يؤول إلى ∞ (أي $k \to \infty$) فإن الحد الأخير في (3.5.7) يؤول إلى الصفر ومن ثم فإنه يمكن كتابة النماذج (1) MA في هــذه الحالــة علــى الصورة.

$$\varepsilon_t = y_t + \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i\, y_{t-i}$$

وبالتالي فإن

$$y_t = \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i\, y_{t-i}$$

وبمقارنة هذه الصورة بالصيغة المنعكسة (3.3.4) نجد أن.

$$\pi_i = -\theta^i \ ,\ i = 1, 2, \cdots \quad ; \ |\theta| < 1$$

أما إذا كانت قيمة $|\theta| \geq 1$ فإن الحد الأخير في المعادلة (3.5.7) لا يتلاشى وبالتالي لا يمكن التعبير عن نماذج (1) MA باســتخدام صــيغة الانعكــاس (3.3.4)، أي أن النماذج MA(1) تكون منعكسة invertibile إذا كانت $|\theta|<1$.

وفي الواقع إنه يمكن التعبير عن شرط انعكاس النماذج MA(1) بشكل آخر أكثر عمومية وذلك بفحص الدالة المميزة أو مرشح المتوسطات المتحركة $\theta(B)=1-\theta B$. فإذا كانت $|\theta|<1$ فإن جذر المعادلة $\theta(B)=0$ لابد أن يكون خارج دائرة الوحدة unit circle أي أن $|B|>1$ هو شرط انعكاس النماذج MA(1). والسؤال الهام الذي يطرح نفسه الآن هو : ما هي شروط انعكاس نماذج MA(q) العامة؟ وللإجابة عن هذا السؤال ببساطة ودون الدخول في التفاصيل والبراهين يمكن القول بأن هذه النماذج يمكن أن تكتب كما سبق أن ذكرنا على الصورة :

$$y_t=\theta(B)\varepsilon_t \quad ; \quad \theta(B)=1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots-\theta_q B^q$$

أي أن $\theta(B)$ كثيرة حدود في B من الدرجة q، وبالتالي وتحت شروط معينة يمكن إعادة كتابة هذه النماذج على الصورة

$$\varepsilon_t=\theta^{-1}(B)\,y_t$$

وبصفة عامة فإن $\theta^{-1}(B)$ كثيرة حدود من درجة لا نهائية، وبالتالي فإنه يمكن وضع هذه النماذج على الصورة

$$y_t=\varepsilon_t+\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i\, y_{t-i}$$

إذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty}|\pi_i|<\infty$ أي إذا كانت المعاملات $\pi_1, \pi_2, \cdots$ تتقارب بشكل مطلق. ويمكن إثبات أن هذا الشرط يتحقق إذا كانت كل جذور المعادلة $\theta(B)=0$ تقع خارج دائرة الوحدة أي إذا كان $|B|>1$ (حيث يشير الرمز $|x|$ بصفة عامة على القيمة المطلقة إذا كانت x قيمة حقيقية real ويشير إلى المقدار $\sqrt{a^2+b^2}$ إذا كان x عدد مركب complex على الصورة $x=a+ib$) . ولمزيد من التفاصيل والبراهين في هذا الصدد يمكن الرجوع إلى Box-Jenkins (1976) وإلى Priestley (1981).

أهمية الانعكاس

الانعكاس صفة خاصة بالنماذج ومستقل تمامًا من حيث المفهوم والأهمية عن السكون والذي سبق دراسته في الباب الثالث. وللانعكاس أهميات عديدة نذكر منها مايلي:

1. يضمن انعكاس النموذج أن تتأثر قيمة y_t بعد فترة معينة بالمشاهدات القريبة أكثر من تأثرها بالمشاهدات البعيدة ،أي أن تأثير ماضي السلسلة على قيمتها الحالية يتناسب عكسيًا من عمر المشاهدة. ففي حالة النموذج MA(1) فإن الشرط $|\theta|<1$ وهو الضروري لتحقيق الانعكاس يضمن أن تأثير المشاهدات الماضية $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$ على القيمة الحالية y_t يتناقص كلما كانت المشاهدات بعيدة عن y_t. وفي حالة النموذج MA(1) نجد أن تأثير المشاهدات يتناقص بشكل أسي.

2. يضمن الانعكاس وجود نموذج وحيد unique بمعلمات محددة يناظر دالة ارتباط ذاتي معينة. فقد وجدنا في النموذج MA(1) أن

$$\rho\ (1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

ويعني هذا أن

$$\theta^2\,\rho\,(1) + \theta + \rho\,(1) = 0$$

$$\theta^2 + \frac{\theta}{\rho\,(1)} + 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في θ لها جذران حاصل ضربهما يساوي الواحد (الحد المطلق)، ومن ثم إذا كان θ_0 أحد هذين الجذرين فإن $\frac{1}{\theta_0}$ يكون الجذر الثاني ويعني هذا أنه يوجد نموذجان MA(1) مختلفان في قيمة المعلمة θ يعطيان نفس دالة الارتباط الذاتي أحدهما فقط يحقق شرط الانعكاس، وكما سنرى في الباب القادم أن دالة الارتباط الذاتي هي أحد أهم المفاتيح السحرية – إن لم تكن أهمها على الإطلاق –

لتطبيق منهجية بوكس وجينكنز. وبناءً على ذلك يجب اختيار أحد الجذرين فقط لضمان وجود نموذج واحد يمكن التعرف عليه، وبالطبع نختار الجذر الذي يضمن تقارب السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty}|\pi_i|$.

3. انعكاس النموذج يمكن في بعض الأحيان من استخدام نموذج MA(q) ذو رتبة صغيرة كبديل لنموذج يعتمد على عدد كبير من المشاهدات السابقة $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$ وبالتالي يساعد الانعكاس على الحصول على ما يعرف في العرف الإحصائي بالنموذج الشحيح parsimonious model أي النموذج الذي يحتوي على أقل عدد ممكن من المعالم.

4. النماذج المنعكسة تعطي تنبؤات أكثر كفاءة من النماذج غير المنعكسة.

مثال (15):

إذا كانت $\{y_t\}$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة الأولى حيث $\theta = 0.5$. أوجد دالة الارتباط الذاتي لهذه العملية ثم أثبت أنه يوجد قيمة أخرى للمعلمة θ تحقق هذه الدالة . ما هي القيمة التي تحقق شرط الانعكاس؟

الحـــل:

$$\rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2} \quad ; \quad \rho(k) = 0, k > 1$$

إذا كانت $\theta = 0.5$ فإن

$$\rho(1) = \frac{-0.5}{1.25} = -0.4 \quad ; \quad \rho(k) = 0, k > 1$$

والآن نأخذ $2 = \frac{1}{0.5} = \theta$ وبالتالي فإن

$$\rho(1) = \frac{-2}{5} = -0.4 \quad ; \quad \rho(k) = 0, k > 1$$

ويعني هذا أن القيمة $\theta = 2$ تعطي نفس دالة الارتباط الذاتي التي تعطيها القيمة $\theta = 0.5$، ومن ثم يمكن القول بأنه يوجد نموذجان يعطيان نفس دالة الارتباط الذاتي الآتية

$$\rho(k) = \begin{cases} -0.4 & ; k = 1 \\ 0 & ; k = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

النموذج الأول MA (1) بمعلمة 0.5 والنموذج الثاني MA (1) بمعلمة 2. النموذج الأول فقط هو الذي يحقق شرط الانعكاس لأن $|\theta| < 1$.

مثال (16)

إذا كانت $\{y_t\}$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة الأولى وكان $\rho(1) = 0.4$ أوجد قيمة المعلمة θ.

الحل:

$$\rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2} = 0.4$$

ومن ثم فإن

$$0.4\theta^2 + \theta + 0.4 = 0$$

$$\theta^2 + 2.5\theta + 1 = 0$$

$$(\theta + \frac{1}{2})(\theta + 2) = 0$$

وبالتالي فإن

$$\theta = -\frac{1}{2} \quad ; \ \theta = -2$$

والقيمة $\theta = -\frac{1}{2}$ هي التي تحقق شرط الانعكاس

3.5.2 عمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية

يقال أن $\{y_t\}$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة الثانية إذا أمكن التعبير عنها في الصورة

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad ; \ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{3.5.8}$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية "اضطرابات هادئة" و θ_2, θ_1 ثابتان يمثلان معلمتي النموذج، وكما سبق أن ذكرنا أنه عادة ما يفترض أن $\{\varepsilon_t\}$ تمثل عملية جاوس. وتستخدم عمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية – والتي يشار إليها بالرمز MA(2) – في تطبيقات مشابهة لتطبيقات عمليات MA(1) إلا أنها أقدر على تمثيل بعض المواقف الأكثر تعقيدًا فهي تستخدم بكثرة في نمذجة المؤشرات الاقتصادية الهامة بعد الهزات الفجائية إذا كانت آثار هذه الهزات تمتد لوحدتين زمنيتين، وبالمثل تستخدم في مواقف مشابهة في مجالات التطبيق الأخرى. وبالطبع فإن هذه العمليات دائمًا ساكنة لأن $\psi_1 = -\theta_1 \ ; \ \psi_2 = -\theta_2 \ ; \ \psi_j = 0, j > 2$ أي أن عدد الحدود غير الصفرية محدود.

ويمكن كتابة هذه النماذج على الصورة

$$y_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

حيث

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$$

والدالة $\theta(B)$ تسمى بموثر العملية الذي يربط y_t بالاضطرابات الهادئة التي يتعرض لها النظام في الماضي، وهي كثيرة حدود من الدرجة الثانية في المؤثر B.

دالة الارتباط الذاتي

بأخذ التوقع والتباين لطرفي المعادلة (3.5.8)

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}) = 0$$

$$\gamma(0) = Var(Y_t) = V(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})$$

$$\gamma(0) = \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

والتغاير الذاتي عند الفجوة الزمنية الأولى

$$\gamma(1) = Cov(Y_t, Y_{t-1})$$

$$= Cov(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2},\ \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \theta_2 \varepsilon_{t-3})$$

$$\gamma(1) = -\theta_1 \sigma^2 + \theta_1 \theta_2 \sigma^2 = -\sigma^2 \theta_1 (1 - \theta_2)$$

والتغاير الذاتي عند الفجوة الزمنية الثانية

$$\gamma(2) = Cov(Y_t, Y_{t-2})$$

$$= Cov(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3} - \theta_2 \varepsilon_{t-4})$$

$$\gamma(2) = -\theta_2 \sigma^2$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$$\gamma(k) = 0 \quad ; \ k = 3, 4, \cdots$$

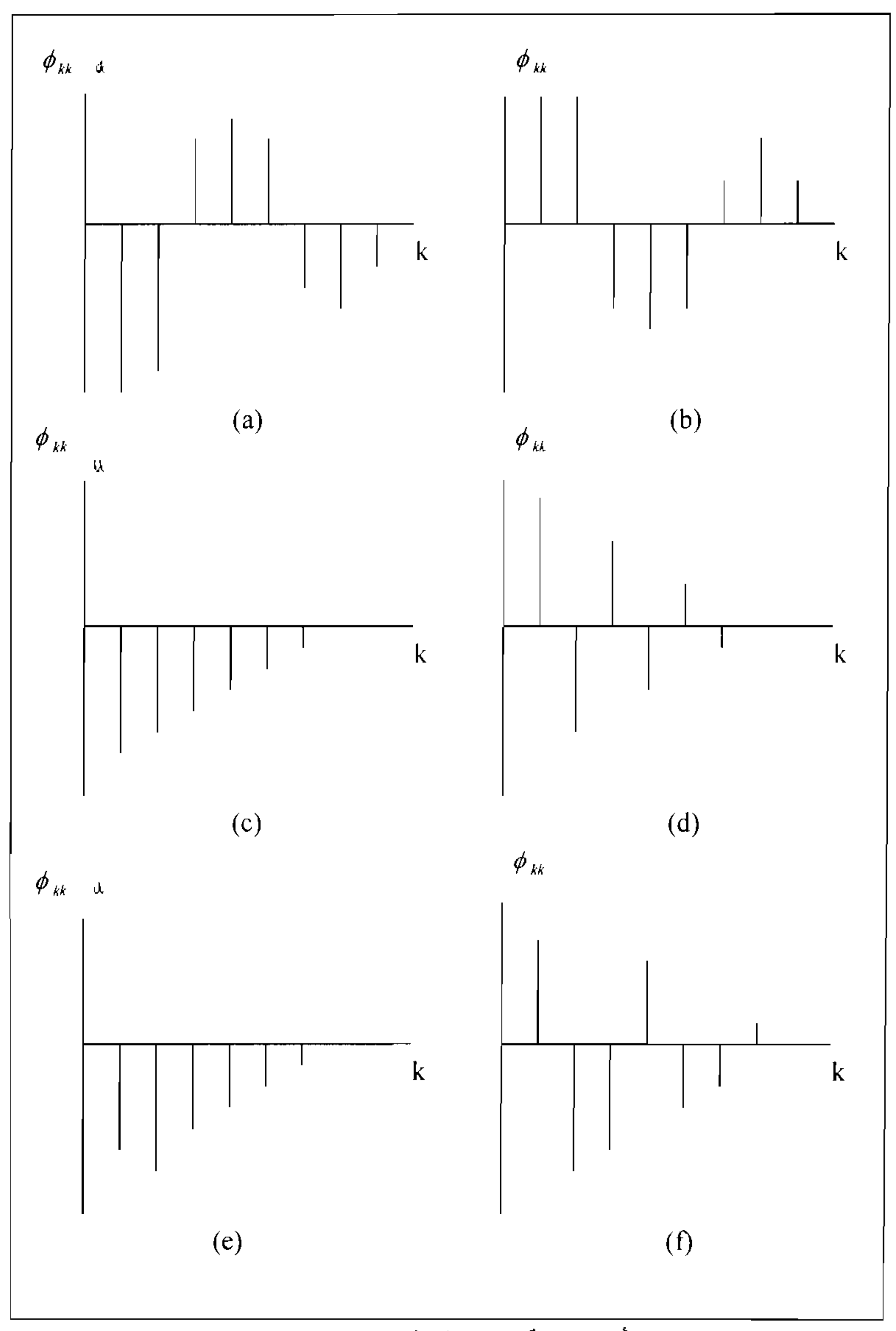
ومن ثم فإن دالة الارتباط الذاتي

$$\rho(k)=\begin{cases}\dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & ;\ k=1\\[2ex] \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & ;\ k=2\\[2ex] 0 & ;\ k=3,4,\cdots\end{cases}$$

ويعني هذا أن دالة الارتباط الذاتي لهذه العمليات تنقطع فجأة بعد الفجوة الزمنية الثانية، ولذلك يقال أن عمليات MA (2) لها ذاكرة مقدارها 2.

دالة الارتباط الذاتي الجزئي

لن نتعرض في هذا الكتاب للصيغة الحسابية أو للاشتقاق الرياضي لدالة الارتباط الجزئي لعمليات MA(2) نظرًا لصعوبتهما، وإنما سنكتفي فقط بذكر الملامح العامة لنمط هذه الدالة. ويمكن القول بصفة عامة أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي لهذه العمليات يحدها مجموع دالتين أسيتين تتلاشيان تدريجيًا إلى الصفر إذا كان جذرا المعادلة $\theta(B)=0$ حقيقيين ويحدها موجات تحاكي دالة الجيب تتلاشى تدريجيًا إلى الصفر إذا كان هذان الجذران مركبين. ويعرض شكل (8) أهم أنماط هذه الدالة التي تنشأ في التطبيقات العملية.



شكل (8): بعض أشكال دالة الارتباط الذاتي الجزئي للعمليات MA (2)

شروط الانعكاس

دون الدخول في التفاصيل الرياضية الدقيقة يمكن إثبات أن شروط الانعكاس – والتي بمقتضاها يمكن تحويل النموذج MA(2) إلى نموذج لا نهائي الحدود بدلالة ماضي السلسلة $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$ هي أن جذري المعادلة المميزة $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0$ يقعان خارج دائرة الوحدة. فإذا كان G_1^{-1}, G_2^{-1} هما جذري المعادلة المميزة $\theta(B) = 0$ فإن

$$1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B) = 0$$

وبالطبع فإن كل من الجذرين G_1^{-1}, G_2^{-1} هو دالة في معلمتي النموذج θ_1, θ_2، وقد يكون من الأفضل كتابة الجذرين على الصورة

$$G_1^{-1}(\theta_1, \theta_2) = G_1^{-1} \quad ; \quad G_2^{-1}(\theta_1, \theta_2) = G_2^{-1}$$

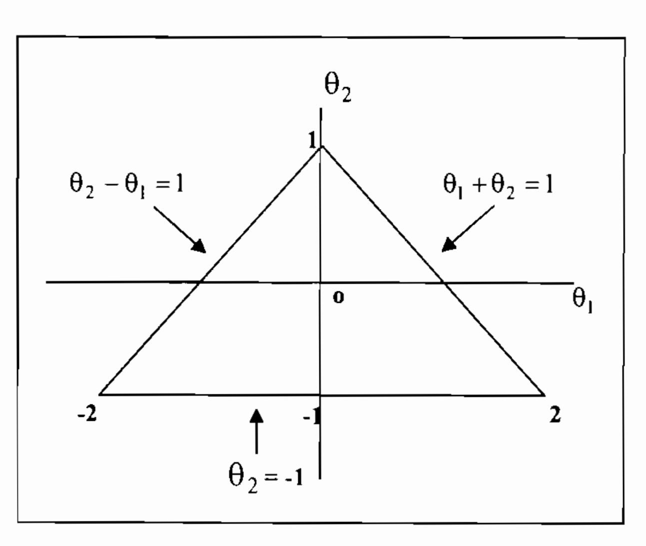
حيث تتلخص شروط الانعكاس في الشرطين

$$|G_1^{-1}(\theta_1, \theta_2)| > 1 \quad ; |G_2^{-1}(\theta_1, \theta_2)| > 1$$

ولكن ماذا يحدث إذا لم يفترض انعكاس النموذج؟ في الواقع أنه بدون افتراض انعكاس النموذج يمكن إثبات أنه يوجد أربعة نماذج مختلفة المعالم تعطي نفس دالة الارتباط الذاتي للعمليات MA(2). كما يمكن إثبات أن هذه النماذج تناظر الأزواج $(G_1^{-1}, G_2^{-1}); (G_1, G_2); (G_1, G_2^{-1}); (G_1^{-1}, G_2)$. ولكن نموذج واحد فقط من بين هذه النماذج يحقق شروط الانعكاس وهو النموذج الذي يناظر الجذرين (G_1^{-1}, G_2^{-1}). ومن ثم فإن شرط انعكاس النموذج MA(2) يكون هام وضروري في التعرف identification على النموذج الذي يناظر دالة الارتباط الذاتي. ويمكن إثبات أن شروط انعكاس النماذج MA(2) يمكن التعبير عنها صراحة بدلالة المعالم كالآتي:

$$(i)\,\theta_1+\theta_2<1 \qquad (ii)\,\theta_2-\theta_1<1 \qquad (iii)\,|\theta_2|<1 \qquad (3.5.9)$$

ويمكن التعبير هندسيًا عن هذه الشروط الثلاثة بجميع النقاط التي تقع داخل مثلث رؤوسه الثلاثة هي (1- ,2-) ;(1- ,2) ;(0, 1) كما في شكل (9).



شكل (9): منطقة الانعكاس لنموذج MA (2)

ولن نعطي هنا كيفية اشتقاق هذه الشروط الثلاثة ولكننا سنكتفي بالقول بأنه يمكن اشتقاق هذه الشروط بطريقة مماثلة للطريقة التي استخدمت لاشتقاق شروط سكون عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية.

مثال (17):

إذا كانت $\{y_t\}$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة الثانية حيث $\theta_1=0.7\ ;\ \theta_2=-0.1$ أوجد دالة الارتباط الذاتي وأثبت أنه يوجد أربعة نماذج مختلفة تناظر هذه الدالة.

الحـــــــل:

$$\rho(1)=\frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\rho(1)=\frac{-0.7(1.1)}{0.5}=-0.513$$

$$\rho(2)=\frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\rho(2)=\frac{0.1}{1.5}=0.067$$

$$\rho(k)=0\ ;\ k=3,4,\cdots$$

(i) المعادلة المميزة

$$1-\theta_1 B-\theta_2 B^2=0$$

$$1-0.7B+0.1B^2=0$$

$$(1-\frac{1}{2}B)(1-\frac{1}{5}B)=0$$

$$\Rightarrow G_1^{-1}=2\quad ;\ G_2^{-1}=5$$

وهذا يعني أن هذا النموذج حيث $\theta_1=0.7\ ;\theta_2=-0.1$ يحقق شروط الانعكاس لأن جذري المعادلة المميزة يقعان خارج دائرة الوحدة

(ii) اعتبر الحالة $G_1=\frac{1}{2}\ ;\ G_2=\frac{1}{5}$

الدالة المميزة في هذه الحالة

$$(1-2B)(1-5B)=0$$

$$1-7B+10\,B^2=0$$

أي أن $\theta_1=7\;;\theta_2=-10$ ومن ثم فإن دالة الارتباط التي تناظر هاتين القيمتين

$$\rho\,(1)=\frac{-7(11)}{1+49+100}=-0.513$$

$$\rho\,(2)=\frac{10}{1+49+100}=0.067$$

$$\rho\,(k)=0\;;\;\;k=3,4,\cdots$$

أي أن هذا النموذج أيضًا يعطي نفس دالة الارتباط الذاتي

(iii) اعتبر الحالة $G_1=2\;;\;G_2=\frac{1}{5}$

الدالة المميزة في هذه الحالة

$$(1-\frac{1}{2}B)\,(1-5\,B)=0$$

$$1-5.5\,B+2.5\,B^2=0$$

أي أن $\theta_1=5.5\;\;;\;\;\theta_2=-2.5$. ومن ثم فإن دالة الارتباط التي تناظر هاتين القيمتين

$$\rho\,(1)=\frac{-5.5(3.5)}{1+5.5^2+2.5^2}=-\;0.513$$

$$\rho\,(2)=\frac{2.5}{1+5.5^2+2.5^2}=0.067$$

$$\rho\,(k)=0\;;\;\;k=3,4,\cdots$$

أي أن هذا النموذج كسابقيه يعطي نفس دالة الارتباط الذاتي

(iv) اعتبر الحالة $G_1=\frac{1}{2}\;\;;\;G_2=5$

الدالة المميزة في هذه الحالة

$$(1-2B)\,(1-\frac{1}{5}B)=0$$

$$1-2.2\,B+0.4\,B^2=0$$

أي أن $\theta_1 = 2.2\ ;\ \theta_2 = -0.4$. ومن ثم فإن دالة الارتباط الذاتي التي تناظر هاتين القيمتين

$$\rho\,(1)=\frac{-2.2(1.4)}{1+2.2^2+0.4^2}=-0.513$$

$$\rho\,(2)=\frac{0.4}{1+2.2^2+0.4^2}=0.067$$

$$\rho\,(k)=0\ \ ;k=3,4,\cdots$$

أي أن هذا النموذج أيضًا يعطي نفس دالة الارتباط الذاتي التي حصلنا عليها آنفاً.

مما سبق نستنتج أن النماذج الأربعة الآتية تعطي نفس دالة الارتباط الذاتي

(i) النموذج MA(2) حيث $\theta_1 = 0.7;\ \theta_2 = -0.1$

(ii) النموذج MA(2) حيث $\theta_1 = 7;\ \theta_2 = -10$

(iii) النموذج MA(2) حيث $\theta_1 = 5.5;\ \theta_2 = -2.5$

(iv) النموذج MA(2) حيث $\theta_1 = 2.2;\ \theta_2 = -0.4$

والنموذج الأول فقط هو الذي يحقق شروط الانعكاس ويمكن إثبات ذلك بالنظر إلى جذري المعادلة المميزة أو بفحص الشروط الثلاثة بدلالة المعالم والمعطاة في (3.5.9).

والآن كيف يمكن التعبير عن النماذج MA(2) بدلالة ماضي السلسلة $y_{t-1},\ y_{t-2},\ldots$ بافتراض توافر شروط الانعكاس؟

أثبتنا أن العلاقة بين المرشح $\psi(B)$ والمرشح $\pi(B)$ هي

$$\pi(B)\,\psi(B) = 1$$

حيث

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots$$

$$\psi(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$$

وبالتالي فإن

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots)(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) = 1$$

بمساواة معاملات B^k في الطرفين نصل إلى

$$-\pi_1 - \theta_1 = 0 \Rightarrow \pi_1 = -\theta_1 \qquad \text{(i)}$$

$$-\pi_2 + \theta_1 \pi_1 - \theta_2 = 0 \Rightarrow \pi_2 = -\theta_1^2 - \theta_2 \qquad \text{(ii)}$$

وبصفة عامة يمكن إثبات أن

$$\pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} + \theta_2 \pi_{j-2} \;\; ; \;\; j > 2 \qquad \text{(iii)}$$

ويمكن استخدام المعادلة (iii) في توليد الأوزان π_j بشكل متتالي. ولتحقيق شروط الانعكاس لابد أن تكون المتتابعة $|\pi_j|$ تقاربية، وهذا يؤدي إلى وضع الشروط على θ_1, θ_2 والتي ذكرناها سابقًا سواءً كانت بدلالة θ_1, θ_2 مباشرة أو بدلالة جذري المعادلة المميزة.

مثال (18):

اعتبر المثال السابق وأوجد أول أربعة أوزان π.

الحـــــل:

$$\pi_1 = -\theta_1 = -0.7$$

$$\pi_2 = -\theta_1^2 - \theta_2 = -0.49 + 0.1 = -0.39$$

$$\pi_3 = \theta_1\pi_2 + \theta_2\pi_1 = 0.7(-0.39) - 0.1(-0.7) = -0.203$$

$$\pi_4 = \theta_1\pi_3 + \theta_2\pi_2 = 0.7(-0.203) - 0.1(-0.39) = -0.1031$$

لاحظ أن تأثير ماضي السلسلة $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$ يتناقص بزيادة عمر المشاهدة

مثال (19):

إذا كان $y_t = 0.8\,\varepsilon_{t-1} - 0.15\,\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$ حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية اضطرابات هادئة. هل هذا النموذج يحقق شروط الانعكاس؟ اشرح سبب إجابتك

الحـــــل:

$$\theta_1 = -0.8 \;\; ; \;\; \theta_2 = 0.15$$

$$\text{(i)}\ \theta_1 + \theta_2 = -0.8 + 0.15 = -0.65 < 1$$

$$\text{(ii)}\ \theta_2 - \theta_1 = 0.15 + 0.8 = 0.95 < 1$$

$$\text{(iii)}\ |\theta_2| = 0.15 < 1$$

ويعني هذا أن النموذج يحقق شروط الانعكاس.

مثال (20):

إذا كانت $\{y_t\}$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة الثانية حيث $\theta_1 = -1.5 \;\; ; \;\; \theta_2 = 0.5$ هل هذا النموذج منعكس؟

الحـــــل:

$$\theta_2 + \theta_1 = 0.5 - 1.5 = 1$$

وبالتالي فإن هذا النموذج لا يحقق الشرط الأول في (3.5.9) ولذلك فهو غير منعكس noninvertible

3.5.3 عمليات المتوسطات المتحركة العامة

يقال أن $\{y_t\}$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة المحدودة q إن أمكن التعبير عنها في الصورة

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \; ; \; t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية " اضطرابات هادئة"، والثوابت $\theta_1, \theta_2; \cdots, \theta_q$ تمثل معلمات أو معاملات النموذج. ويشار إلى هذه النماذج بالرمز MA(q)، وهي عمليات دائمًا ساكنة لأن رتبة النموذج q محدودة ونماذج MA(q) منعكسة إذا كانت جذور المعادلة المميزة $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q = 0$ تقع كلها خارج دائرة الوحدة ويمكن بسهولة إثبات أن دالة الارتباط الذاتي

$$\rho(k) = \begin{cases} \dfrac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \cdots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2} & ; \; k = 1, 2, \cdots, q \\ 0 \; ; \; k > q \end{cases}$$

انظر تمرين (10).

ويعني هذا أن دالة الارتباط الذاتي تنقطع فجأة بعد الفجوة الزمنية q، أي أن هذه العمليات لها ذاكرة مقدارها q. كما يمكن إثبات أنه يوجد 2^q نماذج مختلفة المعالم تعطي نفس دالة الارتباط الذاتي، ولكن يوجد نموذج واحد فقط من بين هذه النماذج يحقق شروط الانعكاس. أما بخصوص إيجاد دالة الارتباط الذاتي الجزئي فهو أمر في

غاية الصعوبة من الناحية الرياضية، إلا أنه يمكن القول أن هذه الدالة تسلك سلوكًا متشابهًا لسلوك دالة الارتباط الذاتي الجزئي في عمليات MA(2).

وقبل أن نختتم الحديث عن عمليات المتوسطات المتحركة تجدر الإشارة إلى نقطتين هامتين هما.

1- من الصعب التمييز بين عمليات المتوسطات المتحركة المختلفة بفحص دالة الارتباط الذاتي الجزئي فقط للسلاسل التي تنشأ في المجالات التطبيقية حيث إن هذه الدالة تسلك سلوكًا متشابهًا في هذه العمليات، وإنما لابد من فحص دالة الارتباط الذاتي لمثل هذه السلاسل لمعرفة رتبة النموذج المناسبة.

2- العلاقة بين $\rho(k)$ ومعلمات النموذج عادة ما تستخدم في إيجاد تقديرات مبدئية للمعلمات $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q$ ولكن يجب أن نتذكر أن هذه المعادلات ليست خطية في المعالم ولذلك يجب حلها باستخدام الطرق العددية، كما يجب أن نعرف أن هذه التقديرات المبدئية ليست بالكفاءة المطلوبة، ولكنها على أية حال تقديرات مبدئية قابلة للتطوير والتحسين من أجل الحصول على تقديرات المربعات الصغرى غير الخطية أو تقديرات الإمكان الأكبر الأكثر كفاءة.

3.6 عمليات الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة

Autoregressive Moving Average Processes

يقال أن $\{y_t\}$ عملية انحدار ذاتي ومتوسطات متحركة أو اختصارًا عملية ARMA من الرتبة (p,q) إذا أمكن التعبير عنها في الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{3.6.1}$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية الاضطرابات الهادئة والثوابت $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q$ تمثل معلمات العملية. وفي هذه العمليات تنحدر قيمة السلسلة الزمنية عند الزمن t أي

y_t على مجموعتين من المتغيرات المفسرة. المجموعة الأولى وتعرف بمجموعة الانحدار الذاتي أو ماضي السلسلة وهي $(y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, y_{t-p})$. والمجموعة الثانية وتعرف بمجموعة المتوسطات المتحركة أو الاضطرابات الهادئة وهي $(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots, \varepsilon_{t-q})$. وتسمي المعالم $(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p)$ بمعلمات الجزء الخاص بالانحدار الذاتي، وتسمي p برتبة هذا الجزء. وتسمى المعالم $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q)$ بمعلمات الجزء الخاص بالمتوسطات المتحركة، وتسمي q برتبة هذا الجزء.

ويمكن التعبير عن هذه العمليات على الصورة

$$\phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t \tag{3.6.2}$$

حيث $\phi(B)$ كثيرة حدود من الدرجة p وتأخذ الصورة

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

وكثيرة الحدود $\theta(B)$ من الدرجة q وتأخذ الصورة

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$

ويمكن النظر إلى نماذج ARMA من الرتبة (p, q) والتي يشار إليها بالرمز ARMA(p,q) بطريقتين مختلفتين. الطريقة الأولي هي اعتبارها كنماذج انحدار ذاتي من الرتبة p الآتية

$$\phi(B)y_t = e_t \tag{3.6.3}$$

حيث $\{e_t\}$ عملية متوسطات متحركة من الرتبة q الآتية

$$e_t = \theta(B)\varepsilon_t \tag{3.6.4}$$

وبالتعويض من (3.6.4) في (3.6.3) تنشأ عمليات ARMA (p, q) المعرفة في الصورة (3.6.2)

والطريقة الثانية التي يمكن النظر بها إلى هذه النماذج المختلطة هي أنه يمكن اعتبارها بمثابة نماذج متوسطات متحركة من الرتبة q الآتية.

$$y_t = \theta(B)\, b_t \tag{3.6.5}$$

حيث $\{b_t\}$ عملية انحدار الذاتي من الرتبة p الآتية

$$\phi(B)\, b_t = \varepsilon_t \tag{3.6.6}$$

وبالتعويض من (3.6.6) في (3.6.5) نصل إلى

$$y_t = \theta(B)\, \phi^{-1}(B)\; \varepsilon_t$$

وذلك بافتراض وجود $\phi^{-1}(B)$

ومن ثم فإن

$$\phi(B)\, y_t = \theta(B)\, \varepsilon_t$$

وهي نفس الصورة (4.6.2)

وعمليات ARMA(p,q) تكون ساكنة إذا كانت جذور المعادلة $\phi(B) = 0$ تقع كلها خارج دائرة الوحدة. وإذا كانت هذه العمليات ساكنة فإنه يمكن التعبير عنها في شكل عمليات متوسطة متحركة ذات رتبة لا نهائية كما يلي

$$y_t = \psi(B)\, \varepsilon_t \quad ; \; \psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \tag{3.6.7}$$

وتكون نماذج ARMA(p,q) منعكسة إذا كانت جذور المعادلة $\theta(B) = 0$ تقع كلها خارج دائرة الوحدة. وإذا كانت هذه النماذج منعكسة فإنه يمكن التعبير عنها في شكل عمليات انحدار ذاتي ذات رتبة لا نهائية كما يلي

$$\pi(B)\, y_t = \varepsilon_t \quad ; \; \pi(B) = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} \tag{3.6.8}$$

ويمكن إيجاد الأوزان π_j, ψ_j بمساواة معاملات B^j في طرفي المعادلتين(3.6.7)، (3.6.8) على الترتيب كما سنرى في عمليات ARMA(1,1).

3.6.1 عمليات ARMA(1,1)

يقال أن $\{y_t\}$ عملية ARMA(1,1) إذا أمكن التعبير عنها في الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi\, y_{t-1} - \theta\, \varepsilon_{t-1} \qquad (3.6.9)$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية الاضطرابات الهادئة، و θ , ϕ يمثلان معلمتي النموذج وعـادة مـا يفترض أن $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس. وعمليات ARMA (1,1) من أهم العمليات المختلطة والتي تستخدم في التطبيقات العملية التي تتوافر فيها الأسباب المؤدية إلى حدوث كـل من النموذجين AR(1), MA(1) معًا مثـل بيانـات الاسـتهلاك الفـردي والعمالـة ودرجات الحرارة وغيره. ويمكن كتابة هذه النماذج على الصورة

$$\phi(B)\, y_t = \theta(B)\, \varepsilon_t$$

حيث

$$\phi(B) = 1 - \phi B$$

$$\theta(B) = 1 - \theta B$$

وعمليات ARMA(1,1) تكون ساكنة إذا كانت $|\phi| < 1$، وفي هذه الحالة يمكن التعبير عنها في صورة عمليات متوسطات متحركة من رتبة لانهائية كما يلي

من(3.6.7)

$$\psi(B) = \frac{1 - \theta B}{1 - \phi B}$$

ومن ثم فإن

$$(1 - \phi B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = 1 - \theta B$$

وبمساواة معاملات B^j في الطرفين نصل إلى

$$\psi_1 = \phi - \theta$$

$$\psi_2 = \phi \psi_1 = (\phi - \theta)\phi$$

وبصفة عامة

$$\psi_j = (\phi - \theta)\phi^{j-1} \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots \tag{3.6.10}$$

ونماذج ARMA(1,1) تكون منعكسة إذا كانت $|\theta| < 1$، وفي هذه الحالة يمكن التعبير عنها في صورة نماذج انحدار ذاتي من رتبة لا نهائية كما يلي

من (3.6.8)

$$\pi(B) = \frac{1 - \phi B}{1 - \theta B}$$

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots)\ (1 - \theta B) = 1 - \phi B$$

وبمساواة معاملات B في الطرفين نصل إلى

$$\pi_1 = \phi - \theta$$

$$\pi_2 = (\phi - \theta)\,\theta$$

وبصفة عامة

$$\pi_1 = (\phi - \theta)\theta^{i-1} \quad ; \quad i = 1, 2, \cdots \tag{3.6.11}$$

ويتضح من(3.6.10)، (3.6.11) أن نماذج ARMA(1,1) يمكن أن تستخدم كتقريبات ملائمة لنماذج المتوسطات المتحركة أو نماذج الانحدار الذاتي اللانهائية، ومن ثم يمكن اعتبارها نماذج شحيحة parsimonious وهي النماذج الملائمة التي تحتوي على أقل عدد ممكن من المعالم، لذلك فإن النماذج المختلطة غالبًا ما تستخدم في التطبيقات العملية بدلاً من نماذج المتوسطات المتحركة والانحدار الذاتي ذات الرتب العليا. ونعرض فيما يلي أهم الخصائص الإحصائية لعمليات ARMA(1,1) التي تتميز بالسكون والانعكاس معًا.

دالة الارتباط الذاتي

بأخذ توقع الطرفين في المعادلة (3.6.9)

$$E(Y_t) = \phi\, E(Y_{t-1})$$

$$E(Y_t) = 0 \quad ; |\phi| < 1$$

بأخذ تباين الطرفين في المعادلة (3.6.9)

$$Var(Y_t) = \gamma(0) = \sigma^2 + \phi^2 \gamma(0) + \theta^2\sigma^2 - 2\phi\theta\sigma^2$$

ومن ثم فإن

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2(1+\theta^2 - 2\phi\theta)}{1-\phi^2} \quad ; |\phi| < 1$$

التغاير عند الفجوة الزمنية الأولى

$$\gamma(1) = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(\varepsilon_t + \phi Y_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-1}, Y_{t-1})$$

$$\gamma(1) = \phi\gamma(0) - \theta\sigma^2$$

$$\gamma(1) = \frac{\sigma^2(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1-\phi^2}$$

التغاير عند الفجوة الزمنية الثانية

$$\gamma(2) = Cov(Y_t, Y_{t-2}) = Cov(\varepsilon_t + \phi Y_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-1}, Y_{t-2})$$

$$\gamma(2) = \phi\gamma(1)$$

وبصفة عامة يمكن إثبات أن التغاير عند الفجوة الزمنية k

$$\gamma(k) = \phi\gamma(k-1) \quad ; \quad k = 2, 3, \cdots$$

ومن ثم فإن معامل الارتباط الذاتي عند الفجوة الزمنية الأولى

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1+\theta^2 - 2\phi\theta}$$

ومعامل الارتباط الذاتي عند الفجوة الزمنية k

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \phi\,\rho(k-1) \quad ; \quad k = 2, 3, \cdots$$

$$\rho(k) = \phi^{k-1}\,\rho(1) \quad ; \; k = 2, 3, \cdots$$

ومن ثم يمكن كتابة دالة الارتباط الذاتي على الصورة

$$\rho(k) = \begin{cases} \dfrac{(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1+\theta^2-2\,\phi\,\theta} & ; \; k = 1 \\ \\ \phi^{k-1}\,\rho(1) & ; k = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

وبفحص دالة الارتباط الذاتي نجد أن $\rho(1)$ يعتمد في حسابه على المعلمتين θ, ϕ معًا، وتعتمد إشارته على إشارة المقدار $(\phi - \theta)$. فإذا كانت $\phi > \theta$ فإن $\rho(1)$ يكون موجبًا والعكس صحيح. بعد ذلك تبدأ دالة الارتباط الذاتي من الاقتراب تدريجيًا من الصفر برتابة إذا كانت $\phi > 0$ أو بصورة ترددية بين الموجب والسالب إذا كانت $\phi < 0$. ونود أن نلفت الانتباه إلى التشابه الكبير بين نمط دالة الارتباط الذاتي لعمليات ARMA(1,1) ونمط هذه الدالة في حالة عمليات AR(1) غير أن الاقتراب من الصفر في هذه الأخيرة يحدث بعد $\rho(0)$ وليس بعد $\rho(1)$ كما هو الحال في عمليات ARMA(1,1).

مثال (21):

إذا كان $y_t = 0.5\, y_{t-1} + 0.9\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ أوجد دالة الارتباط الذاتي وارسـمها

ووضح الفرق بينها وبين دالة الارتباط الذاتي في حالة نماذج AR(1) المناظرة.

الحـــــل:

$$\phi_1 = 0.5 \quad ; \ \theta_1 = -0.9$$

$$\rho(1) = \frac{(1+0.45)(0.5+0.9)}{1+0.9^2+2(0.5)(0.91)}$$

$$\rho(1) = \frac{2.03}{2.71} = 0.75$$

$$\rho(2) = \phi\, \rho(1) = (0.5)\ (0.75) = 0.375$$

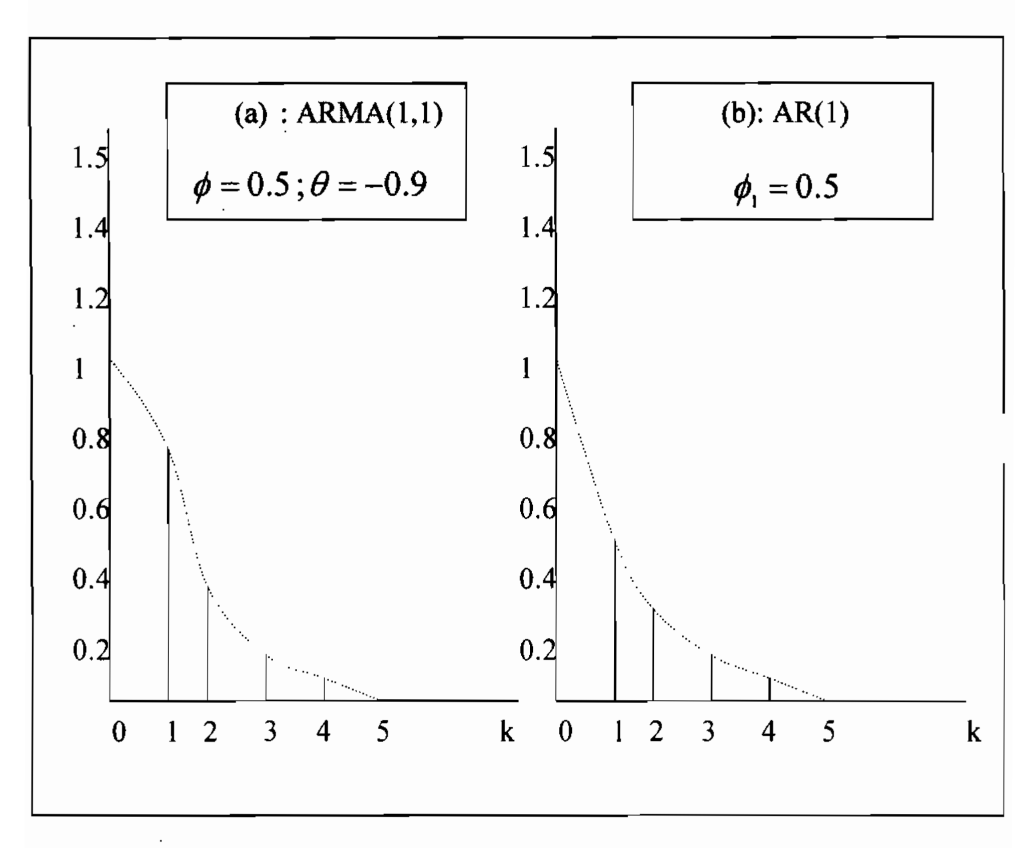
$$\rho(3) = \phi\, \rho(2) = (0.5)\ (0.375) = 0.1875$$

$$\rho(4) = \phi\, \rho(3) = (0.5)\ (0.1875) = 0.09375$$

$$\rho(5) = \phi\, \rho(4) = (0.5)\ (0.09375) = 0.046875$$

أما في حالة AR(1) حيث $\phi = 0.5$ فنجد أن

$$\rho(k): \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.25 \quad 0.125 \quad 0.0625 \quad \cdots$$



شكل (10): دالتي الارتباط الذاتي لنموذج ARMA(1,1) ونموذج AR(1) في المثال (21)

في الشكل(10.a) تتناقص $\rho(k)$ بشكل أسي بدءًا من $\rho(1)$ وليس من $\rho(0)$، وبينما تتناقص $\rho(k)$ بشكل أسي بدءًا من $\rho(0)$ في الشكل(10.b) ويلاحظ أن كل معاملات الارتباط الذاتي موجبة لأن ϕ موجبة وأكبر θ من .

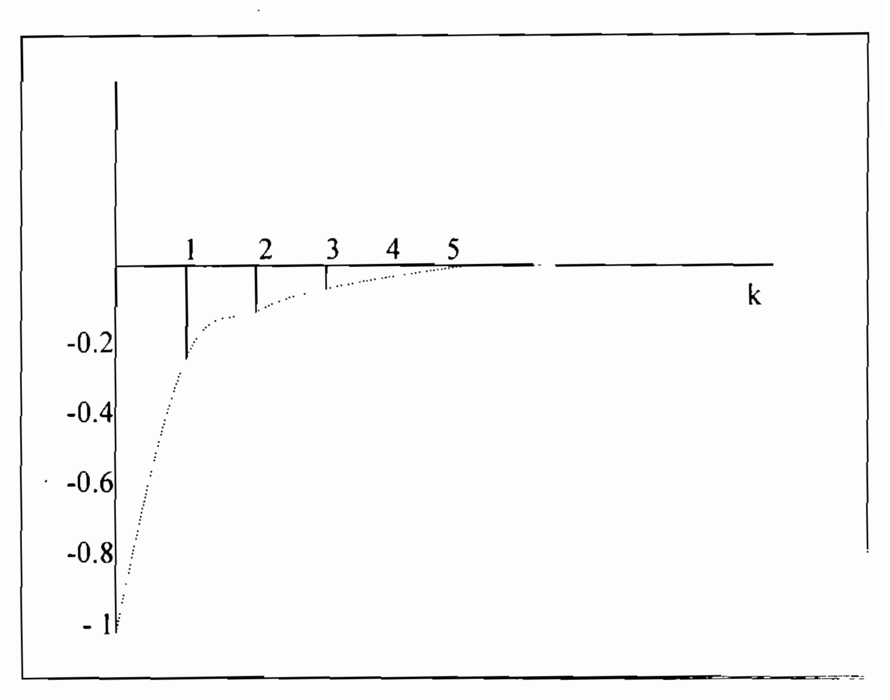
مثال (22):

إذا كان $y_t = 0.5\ y_{t-1} - 0.9\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ أوجد دالة الارتباط الذاتي وارسمها

الحـــــل:

$$\phi = 0.5 \quad ; \ \theta = 0.9$$

$$\rho(1) = -0.24 \; ; \rho(2) = -0.12 \; ; \rho(3) = -0.06 \; ; \rho(4) = -0.03 \; , \cdots$$



شكل (11): دالة الارتباط الذاتي لنموذج ARMA(1,1) حيث $\phi = 0.5; \theta = 0.9$

واضح أن الدالة $\rho(k)$ في شكل (11) تقترب تدريجياً من الصفر بشكل أسي بدءًا من الفجوة الزمنية الأولي، ويلاحظ أن كل معاملات الارتباط الذاتي سالبة لأن ϕ موجبة وأصغر من θ_1.

دالة الارتباط الذاتي الجزئي

معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الأولى

$$\phi_{11} = \rho(1)$$

بعد الفجوة الزمنية الأولى تسلك دالة الارتباط الذاتي الجزئي سلوكًا متشابهًا لدالة الارتباط الذاتي الجزئي لعمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى أي نماذج

$MA(1)$. فإذا كانت $\theta > 0$ فإن ϕ_{kk} بعد الفجوة الأولى يحدها دالة أسية تبدأ في التناقص برتابة بدءًا من ϕ_{11} بإشارة تحدد بواسطة إشارة $(\theta - \phi)$. أما إذا كانت $\theta < 0$ فإن الدالة يحدها دالة أسية تقترب تدريجيًا من الصفر بصورة ترددية بين الموجب والسالب بدءاً من الفجوة الزمنية الأولى بإشارة تحدد بواسطة $(\theta - \phi)$.

3.6.2 عمليات ARMA (p, q) العامة

سبق أن عرفنا عمليات ARMA (p, q) العامة على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

وإذا كانت هذه العمليات ساكنة فإنه يمكن تمثيلها في شكل $MA(\infty)$، وإذا كانت منعكسة فإنه يمكن تمثيلها في شكل $AR(\infty)$. وشكل دالة الارتباط الذاتي لهذه العمليات أصعب كثيرًا إذا ما قورنت بعمليات المتوسطات المتحركة $MA(q)$ أو عمليات الانحدار الذاتي $AR(p)$. وفي معظم التطبيقات العملية عادة ما تكون قيمة كل من الرتبتين p, q أقل من أو تساوي 2 ولذلك سنعرض فيما يلي أهم الخصائص الإحصائية لهذه العمليات والتي يكون فيها $1 < q \le 2$; $1 < p \le 2$.

دالة الارتباط الذاتي

يمكن إثبات أن أول q من معاملات الارتباط الذاتي أي $\rho(1), \cdots, \rho(q)$ تأخذ أشكالاً صعبة لا يمكن إخضاعها لصورة رياضية عامة بدلالة المعالم، وتحدد هذه المعاملات بواسطة مؤثر المتوسطات المتحركة بالإضافة إلى مؤثر الانحدار الذاتي. ولكن بدءًا من $k = q + 1$ نجد أن هذه الدالة تنسى تمامًا مؤثر المتوسطات المتحركة وتسلك سلوكًا مشابهًا لسلك دالة الارتباط الذاتي لعمليات AR(p) التي تأخذ الشكل $\phi(B) y_t = \varepsilon_t$، أي يمكن إثبات أن:

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \cdots + \phi_p \rho(k-p) \; ; \; k > q \cdots \qquad (3.6.12)$$

والمعادلة (3.6.12) معادلة فروق من الرتبة (p)، ويمكن حل هذه المعادلة باستخدام عدد (p) من معاملات الارتباط الذاتي كقيم ابتدائية وهي $\rho(q+1), \rho(q+2), \cdots, \rho(q+p)$. ومن ثم فيمكن القول أن أول q من معاملات الارتباط الذاتي ليس لها نمط عام ثم تأخذ دالة الارتباط الذاتي بعد ذلك نمط هذه الدالة في النماذج AR(p) أي توليفة من الدوال الأسية أو دوال الجيب التي تقترب تدريجيًا من الصفر ولتوضيح ذلك سنعتبر النماذج ARMA (2,1) كمثال. ويمكن كتابة هذه النماذج على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} - \theta \varepsilon_{t-1}$$

ومن ثم فإن

$$\gamma(1) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} - \theta \varepsilon_{t-1}, Y_{t-1})$$

$$\gamma(1) = \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1) - \theta \sigma^2$$

$$\gamma(1) = \frac{\phi_1 \gamma(0) - \theta \sigma^2}{1 - \phi_2} \quad ; |\phi_2| < 1$$

$$\gamma(k) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} - \theta \varepsilon_{t-1}, Y_{t-k}) \quad ; k > 1$$

$$= \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2)$$

ومن ثم فإن

$$\rho(1) = \frac{\phi_1 \gamma(0) - \theta \sigma^2}{\gamma(0)(1 - \theta_2)}$$

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) \quad ; k > 1$$

لحل هذه المعادلة الأخيرة يمكن استخدام القيمتين الابتدائيتين $\rho(2), \rho(3)$ ومن ثم فإن $\rho(1)$ لا تخضع لهذا النظام ولكن بدءًا من $\rho(2)$ تأخذ دالة الارتباط الذاتي شكل مشابه لنظيرتها في نماذج AR(2).

دالة الارتباط الذاتي الجزئي

يمكن كتابة النماذج ARMA (p, q) الساكنة والمنعكسة على الصورة

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(B)\phi(B)\, y_t$$

حيث $\theta^{-1}(B)$ سلسلة لا نهائية في B. وتتميز دالة الارتباط الذاتي الجزئي لهذه النماذج بالصعوبة البالغة سواءً كان في شكلها أو اشتقاقها، ولكن بعد عدد معين من الفجوات تأخذ هذه الدالة نمطًا مشابهًا لنظيرتها في نماذج MA(q) أي يحدها توليفة من الدوال الأسية أو دوال الجيب التي تقترب تدريجيًا من الصفر. وتعتمد الدوال التي تحد ϕ_{kk} على الرتبة q وقيم المعالم $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_q$.

وفي نهاية الحديث عن نماذج ARMA (p, q) لا يخفى الآن على القارئ الفروق الموجودة بين دالتي الارتباط الذاتي.والذاتي الجزئي في نماذج MA (q) ونماذج AR(p) والنماذج المختلطة. ففي نماذج MA(q) ونماذج AR(p) البحتة نجد أن إحدى هاتين الدالتين تنقطع بشكل كامل والدالة الأخرى تقترب تدريجيًا من الصفر. أما في حالة نماذج ARMA(p,q) المختلطة فنجد أن كل من هاتين الدالتين تقترب تدريجيًا من الصفر. وسنرى في الباب الخامس كيفية الاستفادة من هذه الفروق للتعرف على نموذج مبدئي للسلسلة موضع الدراسة.

3.7 عمليات الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية

Autoregressive Integrated Moving Average Processes

سبق أن ذكرنا في الباب الثاني أن معظم السلاسل الزمنية الفعلية التي تنشأ في التطبيقات العملية في معظم مجالات المعرفة غير ساكنة ومن ثم يجب أخذ فروق السلسلة المتتالية لتسكين السلاسل. وسنفترض أن d هو الحد الأدنى للفروق التي يجب أن تأخذ لتسكين السلسلة. ويطلق على النماذج التي تصف مثل هذه العمليات بنماذج ARIMA (p, d, q) تمييزًا لها عن نماذج ARMA(p, q) الساكنة. ولذلك يقال أن $\{y_t\}$ عملية انحدار ذاتي ومتوسطات متحركة تكاملية – ويشار إليها بالرمز ARIMA (p, d, q) – إذا أمكن التعبير عنها على الصورة

$$\phi(B)\,\Delta^d\, y_t = \theta(B)\,\varepsilon_t$$

حيث

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p \qquad ,$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q \qquad ,$$

$$\Delta^d = (1 - B)^d$$

وتكتب هذه العمليات اختصارا كالتالي

$$y_t \sim \text{ARIMA}(p, d, q)$$

وعادة يرمز للسلسلة المحولة $\Delta^d y_t$ بالرمز z_t أي تكتب

$$\phi(B)\, z_t = \theta(B)\,\varepsilon_t$$

حيث $z_t \sim \text{ARMA}(p, q)$ وهي عملية ARMA ساكنة

مثال (23):

اكتب النموذج ARIMA (1, 1, 1) في الشكل النهائي له

الحـــــل:

$$(1-\phi B)(1-B)y_t = (1-\theta B)\varepsilon_t$$

ضع $z_t = (1-B)\,y_t$

$$(1-\phi B)\,z_t = (1-\theta B)\,\varepsilon_t$$

$$z_t = \phi\, z_{t-1} - \theta\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

بالتعويض عن $z_t = y_t - y_{t-1}$

$$y_t - y_{t-1} = \phi(y_{t-1} - y_{t-2}) - \theta\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = (1+\phi)\,y_{t-1} - \phi\,y_{t-2} - \theta\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

وهذه هي الصورة النهائية للسلسلة الأصلية غير الساكنة التي يتبع نظامها نموذج ARIMA(1,1,1). ونود أن نلفت النظر هنا إلى أن $\{y_t\}$ في هذه الصورة الأخيرة تبدو وكأنها عملية ARMA(2,1) . وهذه حقيقة ولكنها بهذا الشكل هي عملية غير ساكنة وأنه قد تم تحويلها باستخدام الفروق الأولى إلى سلسلة جديدة z_t ساكنة تتبع عمليات ARMA(1,1)

مثال (24):

عبر عن عمليات السير العشوائي (بدون اتجاه) كعضو من أعضاء نماذج ARIMA(p, d, q)

الحـــــل:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$$

بوضع $z_t = y_t - y_{t-1}$

$$z_t = \varepsilon_t$$

$$z_t \sim ARMA(0,0)$$

ومن ثم فإن

$$y_t \sim ARIMA(0,1,0)$$

3.8 شروط سكون عمليات ARMA(p,q) العامة

أوضحنا فيما سبق كيفية اشتقاق شروط سكون عمليات AR(1) وعمليات AR(2)، وقد وجدنا أن اشتقاق شروط السكون في حالة عمليات AR(2) قد يتطلب مستوى أعلى من الرياضيات إذا ما قورن بحالة عمليات AR(1). وفي الواقع أن إيجاد واشتقاق شروط السكون في حالة العمليات ذات الرتب الأعلى تحتاج إلى مستوى رياضيات أعلى من مستوى الرياضيات المطلوب في مرحلة البكالوريوس. ولذلك نقدم في هذا المبحث أسلوبًا عامًا يتميز بالسهولة والآلية لمعرفة شروط السكون لأي عملية ARMA(p,q) بدلالة معلمات العملية مباشرة مع مراعاة أن شروط السكون توضع على معلمات الجزء الخاص بالانحدار الذاتي فقط. والأسلوب المشروح هنا هو أسلوب معدل لمعيار روث – هيرويتز Routh-Hurwitz لنظرية التحكم التقليدية. وللمزيد من التفاصيل حول هذا الأسلوب يمكن للقارئ الرجوع إلى Jury (1964). وتعتمد الآلية المقترحة على إنشاء جدول يتكون من عدد (2p-3) من الصفوف حيث $p \geq 2$ كالآتي:

1. نضع في الصف الأول المعالم $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ بالترتيب الطبيعي حيث تعرف $\phi_0 = -1$. ويلاحظ أن عدد عناصر هذا الصف (p+1).
2. نضع في الصف الثاني نفس عناصر الصف الأول ولكن بترتيب عكسي، أي توضع المعالم كالتالي:

$$\phi_p, \phi_{p-1}, \phi_{p-2}, \cdots, \phi_1, \phi_0$$

3. نرمز لعناصر الصف الثالث بالرموز $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ ويحتوي هذا الصف على p عنصر فقط. وتحسب عناصر هذا الصف كالتالي:

$$a_0 = \begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_p \\ \phi_p & \phi_0 \end{vmatrix} ;\ a_1 = \begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_{p-1} \\ \phi_p & \phi_1 \end{vmatrix} ;\ a_2 = \begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_{p-2} \\ \phi_p & \phi_2 \end{vmatrix} ;\ \cdots$$

وبصفة عامة فإن

$$a_i = \begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_{p-i} \\ \phi_p & \phi_i \end{vmatrix} = \phi_0\,\phi_i - \phi_p\,\phi_{p-i} \quad ; \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, p-1$$

الصف		
1 2	$\phi_0 \quad \phi_1 \quad \phi_2$ $\phi_p \quad \phi_{p-1} \quad \phi_{p-2}$	$\cdots \quad \phi_{p-2} \quad \phi_{p-1} \quad \phi_p$ $\cdots \quad \phi_2 \quad \phi_1 \quad \phi_0$
3 4	$a_0 \quad a_1 \quad a_2$ $a_{p-1} \quad a_{p-2} \quad a_{p-3}$	$\cdots \quad a_{p-2} \quad a_{p-1}$ $\cdots \quad a_1 \quad a_0$
5 6	$b_0 \quad b_1 \quad b_2$ $b_{p-2} \quad b_{p-3} \quad b_{p-4}$	$\cdots \quad b_{p-2}$ $\cdots \quad b_0$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$
$2p-3$	$e_0 \quad e_1 \quad e_2$	

4. نضع في الصف الرابع نفس عناصر الصف الثالث ولكن بترتيب عكسي كما فعلنا بالضبط في الخطوة الثانية. ويحتوي هذا الصف أيضًا على p من العناصر.

5. نرمز لعناصر الصف الخامس بالرموز $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{p-2}$ ويحتوي هذا الصف على (p-1) عنصر فقط، وتحسب عناصره باستخدام عناصر الصفين الثالث والرابع كما يلي:

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 \end{vmatrix} \; ; \; b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{p-2} \\ a_{p-1} & a_1 \end{vmatrix} \; ; \; \cdots$$

وبصفة عامة فإن

$$b_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{p-i-1} \\ a_{p-1} & a_i \end{vmatrix} = a_0 \, a_i - (a_{p-1})(a_{p-i-1}) \; ; \; i = 0, 1, \cdots, p-2$$

6. نضع في الصف السادس نفس عناصر الصف الخامس بترتيب عكسي

نكرر العملية السابقة حتى نصل إلى الصف رقم (2p-3) والذي يجب أن يحتوي على ثلاثة عناصر فقط نرمز لهم بالرموز e_0, e_1, e_2. ومن ثم فإن العملية تكون ساكنة إذا توافرت الشروط الآتية معًا:

1. $\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p < 1$

2. $-\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 + \cdots (-1)^p \; \phi_p < 1$

3. $|\phi_p| < 1$

4. $|a_{p-1}| < |a_0| \; ; \; |b_{p-2}| < |b_0| \; ; \cdots \; |e_2| < |e_0|$

مثال (25):

استخدم الأسلوب السابق لإيجاد شروط السكون للعمليات ARMA (2, q)

الحـــــل:

عدد صفوف الجدول

$2\,p - 3 = 2\,(2) - 3 = 1$

$$\begin{matrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \\ (e_0) & (e_1) & (e_2) \end{matrix}$$

وبالتالي فإن شروط السكون هي

1. $\phi_1 + \phi_2 < 1$

2. $\phi_2 - \phi_1 < 1$

3. $|\phi_2| < 1$

والشرط الثالث يعادل الشرط الأخير في الجدول وهو

$$|e_2| < |e_0|$$

مثال (26):

ما هي شروط سكون العمليات ARMA (3, q)؟

الحـــــل:

عدد صفوف الجدول

$$2p - 2 = 2(3) - 3 = 3$$

$$a_0 = \begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_3 \\ \phi_3 & \phi_0 \end{vmatrix} = \phi_0^2 - \phi_3^2 = 1 - \phi_3^2$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_1 \end{vmatrix} = \phi_0 \phi_1 - \phi_2 \phi_3 = -\phi_1 - \phi_2 \phi_3$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} \phi_0 & \phi_1 \\ \phi_3 & \phi_2 \end{vmatrix} = \phi_0 \phi_2 - \phi_1 \phi_3 = -\phi_2 - \phi_1 \phi_3$$

عناصر الصف الثالث والأخير هي

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ (e_0) & (e_1) & (e_2) \end{matrix}$$

وبالتالي فإن الشرط الأخير

$$|e_2| < |e_0|$$

أي أن

$$|a_2| < |a_0|$$

ومن ثم فإن

$$|-\phi_2 - \phi_1\phi_3| < |1 - \phi_3^2|$$

$$|\phi_2 + \phi_1\phi_3| < |1 - \phi_3^2|$$

وبالتالي فإن شروط السكون هي

1. $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 < 1$
2. $-\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 < 1$
3. $|\phi_3| < 1$
4. $|\phi_2 + \phi_1\phi_3| < |1 - \phi_3^2|$

ولا يخفى على القارئ بالطبع أن نفس الأسلوب يمكن استخدامه لمعرفة شروط انعكاس النماذج ARMA(p, q) وهي الشروط التي توضع على معلمات الجزء الخاص بالمتوسطات المتحركة فقط. وبالطبع سنصل إلى نفس شروط السكون مع استبدال المعالم $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p$، بالمعالم $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q$.

مثال (27):

ما هي شروط انعكاس النماذج ARMA (p, 3)؟

الحـــــل:

من المثال السابق نجد أن شروط الانعكاس هي

1. $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 1$

2. $-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 < 1$

3. $|\theta_3| < 1$

4. $|\theta_2 + \theta_1\theta_3| < |1 - \theta_3^2|$

تمارين على الباب الثالث

1. اوجد أول أربعة أوزان ψ (إبساي) وأول أربعة أوزان π (باي) لكل نموذج من النموذجين الآتيين.

a. $y_t = \varepsilon_t - 0.8\ y_{t-1}$

b. $y_t = \varepsilon_t + 0.5\ \varepsilon_{t-1}$

2. إذا كان $y_t = \varepsilon_t - 0.8\ \varepsilon_{t-1}$

a. أوجد $Var(Y_t), E(Y_t)$

b. أوجد دالة التغاير الذاتي

c. أوجد دالة الارتباط الذاتي وارسمها وعلق على الرسم

d. أوجد دالة الارتباط الذاتي الجزئي وارسمها وعلق على الرسم

3. إذا كان $y_t = 0.5\ y_{t-1} + \varepsilon_t$

a. أوجد $Var(Y_t), E(Y_t)$

b. أوجد دالة التغاير الذاتي

c. أوجد دالة الارتباط الذاتي وارسمها وعلق على الرسم

d. أوجد دالة الارتباط الذاتي الجزئي وارسمها وعلق على الرسم

4. إذا كان $y_t = \varepsilon_t + 0.6\ \varepsilon_{t-1}$

أوجد دالة الارتباط الذاتي الجزئي وارسمها وأثبت أنه توجد دالة تحدها وأوجد هذه الدالة.

5. إذا كان $y_t \sim MA(1)$ أثبت أن $-\frac{1}{2} \le \rho(1) \le \frac{1}{2}$

6. إذا كان $y_t \sim MA(1)$ حيث $\theta = -0.5$ أثبت أنه يوجد قيمة أخرى للمعلمة θ تحقق دالة الارتباط الذاتي. وما هي القيمة التي تحقق شروط الانعكاس.

7. إذا كان $y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} + 0.5\ \varepsilon_{t-2}$. أوجد أول أربعة أوزان ψ وأول أربعة أوزان π، ثم أوجد دالة الارتباط الذاتي وارسمها وعلق على الرسم.

8. أوجد دالة الارتباط الذاتي لكل نموذج من النماذج الآتية مع الرسم والتعليق.

a. $y_t = -0.5\ \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

b. $y_t = -0.9\ \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

c. $y_t = -0.2\ \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

d. $y_t = 0.5\ \varepsilon_{t-1} - 0.3\ \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

e. $y_t = 1.5\ \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

9. في التمرين رقم (7) أثبت أنه يوجد أربعة نماذج مختلفة تناظر دالة الارتباط الذاتي وأوجد هذه النماذج ثم أوجد النموذج الذي يحقق شروط الانعكاس.

10. أوجد مع البرهان دالة الارتباط الذاتي للسلاسل الزمنية التي يتبع نظامها عمليات المتوسطات المتحركة ذات الرتبة العامة q. ثم أوجد هذه الدالة لعمليات MA (3).

11. أوجد دالة الارتباط الذاتي لكل نموذج من النماذج الآتية مع الرسم والتعليق.

a. $y_t = 0.2\ y_{t-1} + \varepsilon_t$

b. $y_t = 0.5\ y_{t-1} + \varepsilon_t$

c. $y_t = 0.9\ y_{t-1} + \varepsilon_t$

12. إذا كان

$y_t \sim AR(1)$ حيث $\phi = 0.8$

$z_t \sim AR(1)$ حيث $\phi = 0.8$

ارسم دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لكل عملية ثم قارن بين سلوك هاتين الدالتين في العمليتين.

13. إذا كان $y_t = \varepsilon_t + 0.8\ y_{t-1} - 0.5\ y_{t-2}$

a. أثبت أنه يمكن تمثيل هذه السلاسل في صورة اضطرابات هادئة فقط وأوجد أول أربعة أوزان ψ.

b. أوجد أول أربعة معاملات ارتباط ذاتي وارسم هذه المعاملات بيانيًا وعلق عليها.

14. أوجد جذري المعادلة المميزة للسلاسل التي يتبع نظامها النموذج

$y_t = 0.6\, y_{t-1} - 0.8\ y_{t-2} + \varepsilon_t$ وأثبت أن هذه السلاسل ساكنة.

15. احسب دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي للعملية المذكورة في التمرين رقم (14) وارسمها وعلق عليها.

16. إذا كان $y_t = \varepsilon_t + 0.5\ y_{t-1} + 0.5\ y_{t-1}$

أثبت أنه يمكن وضع العملية $\{y_t\}$ في صورة اضطرابات هادئة فقط وفي صورة ماضي السلسلة فقط ثم أوجد أول أربعة أوزان ψ وأول أربعة أوزان π.

17. في التمرين رقم (16) أوجد أول أربعة معاملات ارتباط ذاتي وارسم هذه المعاملات بيانيًا وعلق عليها. ما الفرق بين هذه المعاملات ومعاملات الارتباط الذاتي المناظرة لعملية AR(1) بمعلمة $\phi = 0.5$

18. إذا كان $y_t \sim ARMA\,(1,2)$ أوجد دالة الارتباط الذاتي وادرس نظامها العام ثم احسب أول أربعة معاملات ارتباط ذاتي إذا كان $\phi_1 = 0.5\ ;\ \theta_1 = 0.5\ ;\ \theta_2 = -0.5$.

19. اكتب النماذج الآتية في الشكل النهائي لها

a. ARIMA (0, 1, 1)

b. ARIMA (1, 1, 0)

c. ARIMA (1, 2, 1)

d. ARIMA (2, 1, 1)

20. اوصف النماذج الآتية كأعضاء لنماذج ARMA (p, q) واختبر سكون وانعكاس كل نموذج.

a. $(1-0.5\,B)\,y_t = (1-0.3\,B)\,\varepsilon_t$

b. $(1-0.2\,B+0.8\,B^2)\,y_t = (1-0.8\,B)\,\varepsilon_t$

c. $(1-0.2\,B)^2\,y_t = \varepsilon_t$

d. $y_t = (1 - 0.2\,B + 1.5\,B^2)\varepsilon_t$

21. اختبر سكون وانعكاس كل نموذج من النماذج الآتية

a. $y_t - 1.5\,y_{t-1} + 0.5\,y_{t-2} = \varepsilon_t$

b. $y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t - 0.5\,\varepsilon_{t-1}$

c. $y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t - 1.3\,\varepsilon_{t-1} + 0.3\,\varepsilon_{t-2}$

22. اوصف النماذج الآتية كأعضاء لنماذج ARIMA (p, d, q)

a. $(1 - B)\,y_t = (1 - 0.5\,B)\,\varepsilon_t$

b. $(1 - B)^2\,y_t = (1 - 0.5\,B)\,\varepsilon_t$

c. $(1 - B)(1 - 0.8\,B)\,y_t = (1 - 0.8\,B)\,\varepsilon_t$

d. $y_t = y_{t-1} + 0.3\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

e. $y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + 1.5\,\varepsilon_{t-1} + 0.2\,\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

23. اكتب نظام يوول والكر لكل نموذج من النموذجين الآتيين:

a. $y_t - 0.8\,y_{t-1} = \varepsilon_t$

b. $y_t - 1.5\,y_{t-1} + 0.5\,y_{t-2} = \varepsilon_t$

ثم حل نظام يوول والكر للحصول على $\rho(1)$, $\rho(2)$

24. باستخدام نظام يوول والكر أثبت أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنماذج AR(2) هي

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2} & ; k=1 \\ \phi_2 & ; k=2 \\ 0 & ; k=3,4,\cdots \end{cases}$$

25. ما هي شروط انعكاس النماذج ARMA (p, 3)؟

26. ما هي شروط سكون العمليات AR (4)؟

27. إذا كان جذرا المعادلة المميزة في السلاسل الزمنية التي تتبع نماذج AR(2) هما $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. أثبت أن دالة جرين يمكن كتابتها على الصورة $\psi_j = j+1$ ثم اختبر سكون السلسلة .

28. أثبت أن دالة جرين لنماذج ARMA (2,1) يمكن أن تكتب على الصورة

$$\psi_j = \left[\frac{G_1 - \theta_1}{G_1 - G_2}\right] G_1^j + \left[\frac{G_2 - \theta_1}{G_2 - G_1}\right] G_2^j$$

حيث G_1^{-1}, G_2^{-1} هما جذرا المعادلة $1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$. ما هي شروط سكون وانعكاس هذه العمليات؟

29. في إحدى عمليات ARMA (2, 1) كان $\phi_1 = 1.5 \; ; \; \phi_2 = 0.5 ; \theta_1 = 0.3$ أوجد دالة جرين لهذه العملية واختبر سكون هذه العملية.

30. إذا كان $G_1 = 1 \; ; \; G_2 = -1$ في إحدى عمليات ARMA (2,1). أوجد دالة جرين واختبر سكون هذه العملية.

الباب الرابع

منهجية بوكس وجينكنز
BOX AND JENKINS METHODOLOGY

□ التعرف □ التقدير □ التشخيص □ التنبؤ □ مميزات وعيوب منهجية بوكس وجينكنز



تناولنا في الباب الأول الفلسفة العامة التي اعتمدت علهيا بعض الطرق التقليدية في نمذجة البيانات الزمنية ورأينا أن هذه الطرق تعتمد على بعض النماذج البسيطة والمحدودة ولا ترقى بأي حال من الأحوال لأن تكون نظام نمذجة وتنبؤ كامل موثوق به. كما رأينا أن هذه الطرق تعتمد على مبدأ الاستقلال بين المشاهدات والذي يتعارض مع مفهوم السلسلة الزمنية باعتبارها مجموعة مرتبطة من البيانات أو المشاهدات المأخوذة عن ظاهرة زمنية معينة. كما ذكرنا أن هذه الطرق عادة ما تفشل في إعطاء تنبؤات موثوق بها أو فترات ثقة ملائمة. وتناولنا في الباب الثاني المفاهيم الأساسية الضرورية لفهم منهجية بوكس وجنكيز مثل الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي والسكون وغيرها من المفاهيم. كما قدمنا في الباب الثالث مجموعة هامة وفريدة من نماذج السلاسل الزمنية المعروفة بنماذج ARMA والتي غالبًا ما تكون قادرة على عكس العديد من أنماط الارتباط الذاتي من البيانات الزمنية التي تظهر في جميع فروع المعرفة. كما تناولنا في الباب الثالث أيضًا بالدراسة نماذج المتوسطات المتحركة ونماذج الانحدار الذاتي والنماذج المختلطة واشتقاق الخصائص الإحصائية الهامة لهذه النماذج والتي تسمى عادة بنماذج بوكس وجينكنز باعتبارها مسرح الأحداث التي تعتمد عليها منهجية هذين العالمين. أما هذا الباب فقد خصصناه لعرض منهجية بوكس وجينكنز والمراحل الأساسية اللازمة لتطبيق هذا الأسلوب في تحليل السلاسل الزمنية. ويمكن اعتبار هذا الباب بمثابة القلب للكتاب والضلع الثالث للبابين السابقين، ويتناول المبحث الأول دراسة المرحلة الأولى وهي مرحلة التعرف وكيفية توظيف أدوات

الارتباط الذاتي لاختيار نموذج مبدئي ملائم للبيانات. كما يتناول المبحث الثاني المرحلة الثانية من منهجية بوكس وجينكنز وهي مرحلة تقدير معالم النموذج الملائم للبيانات واستعراض أهم طرق التقدير مثل طريقة المربعات الصغرى الشرطية وغير الشرطية وطريقة الإمكان الأكبر الشرطية وغير الشرطية. كما يتناول المبحث الثالث بالدراسة أهم الاختبارات و الفحوص التشخيصية لدراسة ملاءمة النموذج المبدئي بغرض تحسينه أو تطويره وأهمها تحليل السكون والإنعكاس والبواقي ودراسة إمكانية حذف بعض المعالم أو إضافة بعض المعالم الأخرى. ويتناول المبحث الرابع بالدراسة أسلوب التنبؤ المقترح وخصائصه وتقدير الأخطاء وكيفية التنبؤ بالمشاهدات المستقبلية وبناء فترات الثقة لها وذلك لعمليات السلاسل الزمنية المختلفة.

بنهاية هذا الباب يكون الطالب قادرًا على:

- تحديد رتبة الفروق الضرورية لتسكين السلسلة.
- اختبار معنوية معاملات الارتباط الذاتي.
- اختبار معنوية معاملات الارتباط الذاتي الجزئي.
- تحديد نموذج ARIMA (p,d,q) المبدئي الملائم.
- التمييز بين التقديرات الشرطية وغير الشرطية.
- التمييز بين تقديرات المربعات الصغرى الخطية وغير الخطية.
- اشتقاق تقديرات المربعات الصغرى الشرطية وغير الشرطية لمعالم نماذج الانحدار الذاتي.
- إيجاد تقديرات الإمكان الأكبر الشرطية وغير الشرطية لمعالم نماذج الانحدار الذاتي.
- إيجاد تقديرات المربعات الصغرى غير الخطية لمعالم نماذج المتوسطات المتحركة.
- إيجاد تقديرات المربعات الصغرى لمعالم النموذج ARMA(1,1).
- معرفة خصائص مقدرات الإمكان الأكبر التقاربية.
- اختبار معنوية معاملات الارتباط الذاتي للبواقي.

- فحص عشوائية البواقي باستخدام إحصاء بوكس وبيرس المعدل.
- تطوير النموذج المبدئي بناءً على تحليل السكون والانعكاس.
- تطوير النموذج المبدئي بناءً على نتائج تحليل البواقي.
- إجراء اختبارات إضافة بعض المعالم.
- إجراء اختبارات حذف بعض المعالم.
- فهم مدلول التنبؤ ذو أصغر متوسط مربعات الأخطاء .
- تقدير الأخطاء.
- إيجاد تنبؤ النقطة لمشاهدة مستقبلية.
- اشتقاق وحساب فترات التنبؤ للمشاهدات المستقبلية .
- معرفة مميزات وعيوب منهجية بوكس وجينكنز.

4.1 التعرف Identification

أول مرحلة من مراحل التحليل الحديث للسلاسل الزمنية هي التعرف identification على النموذج المبدئي الملائم لبيانات السلسلة الزمنية المرصودة. ويقصد بالتعرف على النموذج اختيار رتب النموذج الثلاث (p,d,q) حيث يشير الرمز d إلى رتبة أو درجة الفروق الضرورية لتسكين السلسلة الزمنية، ويشير الرمز p إلى عدد حدود المشاهدات السابقة التي يجب إدراجها في النموذج المبدئي الملائم، بينما يشير الرمز q إلى عدد متغيرات الإضطرابات الهادئة التي يجب أن يشملها النموذج الملائم. وتعد مرحلة التعرف من أصعب مراحل التحليل وأهمها – ليس في مجال السلاسل الزمنية فحسب بل في مجال الإحصاء بصفة عامة– وأحد أسباب ندرة تطبيق منهجية بوكس وجينكنز في البلاد النامية. بصفة خاصة حيث تتطلب هذه المرحلة – بالإضافة إلى الأسس النظرية– مهارة وخبرة وممارسة عملية وقدر من الحكم الشخصي للباحث. وقبل الاسترسال في عرض أدوات بوكس وجينكنز في التعرف على الرتب الثلاث نود أن نلفت نظر القارئ إلى بعض الحقائق الهامة الآتية:

1- أن هذه المرحلة هي مرحلة اختيار لنموذج ARIMA (p,d,q) المبدئي الملائم للسلسلة الزمنية وهي مرحلة محكومة بالأسس النظرية والعلمية -التي سنعرضها بالتفصيل- ومهارة الباحث وقدرته على الحكم الشخصي الجيد لمدي تطابق خصائص البيانات (العينة) مع خصائص العملية العشوائية التي قد تكون وراء توليد هذه البيانات (العينة).

2- أن النموذج الذي تم اختياره يمكن تعديله أو تحسينه أو حتى تنحيته جانبًا في المراحل المتقدمة من الدراسة والتحليل.

3- قد يختار الباحث في هذه المرحلة أكثر من نموذج واحد .وعلي الباحث حمل هذه النماذج معه إلى المراحل الأعلى في الدراسة أملاً في النهاية أن يحتفظ بأفضل نموذج قادر على عكس خصائص السلسلة المتاحة من بين هذه النماذج.

4.1.1 تحديد رتبة الفروق

ذكرنا في الباب الثاني أن معظم السلاسل الزمنية التي تنشأ في مجالات التطبيق المختلفة عادة ما تظهر نوعًا معينًا من عدم السكون سواءً كان في متوسطها أو في تباينها أو في كليهما معًا. وفي الواقع أن عدم السكون قد يحدث بأكثر من طريقة، فقد ذكرنا أن الحكم على سكون أو عدم سكون العمليات يأتي من خلال فحص جذور المعادلة المميزة $\phi(B)=0$. فإذا كانت كل جذور هذه المعادلة تقع خارج دائرة الوحدة بشكل واضح فهذا يعني أن العملية أو السلسلة ساكنة وفي هذه الحالة تتلاشى دالة الارتباط الذاتي بسرعة مع زيادة الفجوات الزمنية. أما إذا كان بعض الجذور أو كلها تقع داخل دائرة الوحدة فهذا يعني أن العملية أو السلسلة غير ساكنة explosive، وهذا النوع من عدم السكون يكون نادر الحدوث – وتكون دالة الارتباط الذاتي لهذه السلاسل غير معرفة بالشكل الذي درسناه- وهو خارج اهتمام هذا الكتاب. أما إذا كان أحد الجذور يقع على دائرة الوحدة فهذا يعني أن العملية أو السلسلة تكون غير ساكنة

ولكنها متجانسة، وهذا النوع من عدم السكون هو الذي تتميز به معظم السلاسل الفعلية التي تنشأ في التطبيقات العملية، ويمكن تحويل مثل هذه السلاسل إلى سلاسل ساكنة باستخدام التحويلات الرياضية التي سبق تقديمها في الباب الثالث. وهذا النوع من عدم السكون هو محور اهتمامنا الرئيسي في هذا الكتاب.

وتتميز دالة الارتباط الذاتي للسلاسل الزمنية الساكنة بالتلاشي السريع بزيادة الفجوات الزمنية كما سبق أن ذكرنا في معرض الحديث عن عمليات أو نماذج ARMA. والسؤال الآن هو: ما هو نمط دالة الارتباط الذاتي للسلاسل الزمنية غير الساكنة المتجانسة؟ للإجابة عن هذا السؤال قد يكون من المفيد أن نذكر القارئ بأن خاصية السكون لها علاقة بمؤثر الانحدار الذاتي $\phi(B)$، وللتبسيط نعتبر النموذج AR(1) والذي أثبتنا أن دالة ارتباطه الذاتي يمكن أن تكتب على الصورة.

$$\rho(k) = \phi^{k} \quad ; \; k = 1, 2, \cdots \quad ; \; |\phi| < 1$$

إذا كانت ϕ موجبة و قريبة من الصفر فإن السلسلة تكون ساكنة بشكل واضح، وفي هذه الحالة تتناقص $\rho(k)$ بسرعة مع زيادة الفجوة k. افترض الآن أن قيمة ϕ قريبة جدًا من الواحد ولتكن $\phi = 1 - \delta$ حيث δ مقدار صغير موجب يقترب من الصفر باقتراب ϕ من الواحد، ومن ثم فإن

$$\rho(k) = (1 - \delta)^{k} \approx 1 - \delta k$$

ويعني هذا أن دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ تتناقص ببطء وفي شكل خط مستقيم تقريبًا. ومن ثم فإن ثبات دالة الارتباط الذاتي أو تضاؤلها ببطء يعتبر مؤشرًا على أن السلسلة الزمنية غير ساكنة ومتجانسة. وهذا التفسير يمكن تعميمه على النماذج ذات الرتب الأعلى ولكننا لن نتطرق لذلك.

والآن وبعض استعراض خصائص دالة الارتباط الذاتي للسلاسل الزمنية الساكنة وغير الساكنة (المتجانسة) كيف يمكن تحديد قيمة d الملائمة؟ في الواقع أن أول ما ينظر إليه عادة قبل تحديد قيمة d هو تشتت البيانات على شكل الانتشار أو

منحنى السلسلة الزمنية الأصلية y_t. فإذا كان التباين غير ساكن فإنــه يجــب تــسكين التباين بأخذ اللوغاريتمات للسلسلة الأصلية. وعادة ما تنجح تحويلة اللوغاريتمات في تسكين التباين ولكن في بعض الحالات قد نحتاج إلى استخدام تحويلة أخرى مثل الجذر التربيعي أو التكعيبي أو أي تحويلة أخري. وسنفترض الآن أن التباين للسلسلة الأصلية y_t ساكنًا (أو على الأقل قد تم تسكينه) ولتحديد قيمة d نتبع الخطوات الآتية.

1. رسم المنحنى الزمني للسلسلة الأصلية y_t ورسم دالة الارتبــاط الــذاتي للعينة (للسلسلة المرصودة). فإذا كان الرسم لا يوضح أي نوع من عدم السكون فــي المتوسط والتباين وكانت دالة الارتباط الذاتي للعينة $r(k)$ تتلاشى بشكل ســريع مــع زيادة الفجوة الزمنية k، فإنه لا يؤخذ أي فروق للسلسلة وتكون $d=0$ وننتقل مباشرة إلى البحث الفرعي التالي لاختيار قيمتيp و q.

2. إذا أظهر الرسم عدم سكون بالنسبة للمتوسط وكانت دالة الارتباط الــذاتي للعينة تتلاشى ببطء فلابد من أخذ الفروق الأولى للسلسلة وبعد ذلك نرســم المنحنــى الزمني ودالة الارتباط الذاتي للعينة لسلسلة الفروق z_t، فإذا أظهر الرسم سكون فــي السلسلة وكانت دالة الارتباط الذاتي للعينة تتلاشى بشكل سريع مــع زيــادة الفجــوة الزمنية فإنه لا يؤخذ أي فروق أخرى وتكون $p=1$ وننتقل مباشرة إلى المبحث الفرعي التالي لاختيار قيمتي q, p.

3. إذا لوحظ من المنحنى الزمني لسلسلة الفــروق z_t أن سلــسلة الفــروق مازالت تعاني من عدم سكون خصائصها الأساسية وأن دالة الارتبــاط الــذاتي لهــذه السلسلة تتلاشى ببطء فلابد من أخذ الفروق الثانية للسلسلة الأصلية. ثم نقــوم برســم المنحني الزمني ودالة الارتباط الذاتي لسلسلة الفروق الثانية w_t، فإذا لوحظ سكون في المنحني الزمني وتضاؤل سريع في دالة الارتباط الذاتي فإننا نتوقف عن أخذ الفروق وتكون $d=2$ وننتقل مباشرة إلى المبحث الفرعي التالي لاختيار قيمتي p, q.

وعادة ما تكون قيمة d صغيرة (صفر أو 1 أو 2). ونود أن نلفت نظر القارئ إلى خطورة أخذ فروق غير ضرورية، فعلى الرغم من أن فروق أي سلسلة ساكنة يعطي سلسلة ساكنة، إلا أن أخذ فروق غير ضرورية يؤدي إلى نموذج يحتوي على معالم غير ضرورية ونمط ارتباط ذاتي أكثر تعقيدًا. بالإضافة إلى ذلك فإن أخذ فروق غير ضرورية عادة يؤدي إلى كبر تباين السلسلة، ولتوضيح هذه الحقائق اعتبر السلسلة الآتية على سبيل المثال.

$$y_t = \varepsilon_t$$

أي أن السلسلة الأصلية هي بالضبط عملية الاضطرابات الهادئة خالية المعالم والتي تتميز بأن كل معاملات الارتباط الذاتي لها تساوي الصفر. بأخذ الفروق الأولى لهذه السلسلة.

$$z_t = y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

ومن ثم فإن النموذج الجديد هو نموذج متوسطات متحركة غير منعكس من الرتبة الأولى، وهو نموذج أصعب من نموذج الاضطرابات الهادئة ودالة ارتباطه الذاتي هي:

$$\rho(k) = \begin{cases} -0.5 & ; \quad k = 1 \\ \\ 0 & ; \quad k > 1 \end{cases}$$

وتباين سلسلة الفروق

$$\mathrm{Var}(Z_t) = V(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) = 2\sigma^2$$

أي أن تباين سلسلة الفروق يساوي ضعف تباين السلسلة الأصلية. والجدير بالذكر أن Tintner (1940) قد استخدم التغيرات التي تحدث في تباينات الفروق المتتالية لتحديد رتبة الفروق اللازمة لتسكين السلسلة.

4.1.2 تحديد رتبتي الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة

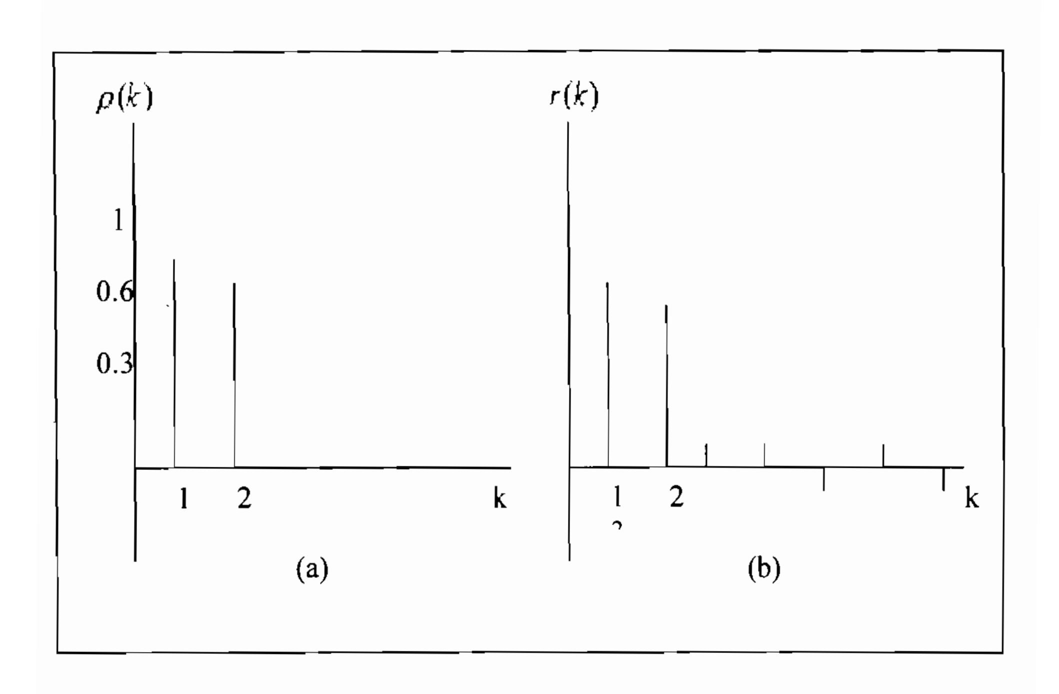
بعد تحديد رتبة الفروق الضرورية لتسكين السلسلة يجب تحديد رتبة الجــزء الخاص بالانحدار الذاتي p ورتبة الجزء الخاص بالمتوسطات المتحركة q. وتعتبر كل من دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي الجزئي أحد المفاتيح السحرية والفعالــة في التمييز بين النماذج AR(p) والنماذج MA(q) والنماذج المختلطــة ARMA(p,q) وتحديد رتبة كل منها. وقبل الشرح والإسهاب قد يكون مــن الــضروري اســتدعاء الخصائص الأساسية لهاتين الدالتين ونمط كل منها لأهم النماذج التي تنتمي إلى هــذه العائلات الثلاث وتلخيصها في جدول (1)

والخصائص الرئيسية لدالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي والتي جاءت في الجدول (1) تسمي بالخصائص النظرية للعملية العشوائية، ولكن وكما هو مألوف في علم الإحصاء أنه يوجد اختلاف بين الخصائص النظرية للعملية العشوائية التي ولدت السلسلة المرصودة –أو ما يعرف في علم الإحصاء بخصائص المجتمع– وخصائص السلسلة المرصودة بالفعل –أو ما يعرف بالعينة– بسبب أخطاء المعاينة. وعلى أية حال إذا كان حجم العينة (طول السلسلة) كبيرًا فإن من المتوقع أن تعكس دالة الارتباط المقدرة $r(k)$ الخصائص الأساسية لدالة الارتباط النظرية $\rho(k)$ بشكل تقريبي.

جدول (1): خصائص دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لنماذج ARMA

النموذج	$\rho(k)$	ϕ_{kk}
AR(1)	تقترب تدريجيا من الصفر بشكل أسـي أو بشكل متردد في الإشارة	تنقطع تمامًا بعد الفجوة الزمنية الأولي
AR(2)	تقترب تدريجيا من الصفر بشكل أسـي أو متردد في الإشارة أو موجات الجيب	تنقطع تمامًا بعد الفجوة الزمنية الثانية
AR(p)	تقترب تدريجيًا من الصفر بشكل أسـي أو متردد في الإشارة أو موجات الجيب	تنقطع تمامًا بعد الفجوة الزمنية p
MA(1)	تنقطع تمامًا بعد الفجوة الزمنية الأولى	يحدها دالة تقترب تدريجيًا من الصفر في صورة أسية
MA(2)	تنقطع تمامًا بعد الفجوة الزمنية الثانية	يحدها مجموع دالتين تتلاشيان تدريجيًا إلى الصفر في صورة أسية أو موجات تحاكي دالة الجيب
MA(q)	تنقطع تمامًا بعد الفجوة الزمنية q	يحدها توليفة من الدوال التي تقترب تدريجيًا من الصفر في صورة أسية أو موجات تحاكي دالة الجيب.
ARMA(p, q)	تقترب تدريجيًا من الصفر بعد أول (q-p) من للفجوات بشكل أسي أو موجـات مـن دالة الجيب	يحدها بعد أول (p-q) من الفجوات توليفة من الـدوال التي تقترب من الصفر في صورة أسية أو موجات من دالة الجيب

ولتوضيح الصورة افترض أن المعاينة تتم من عملية متوسطات متحركة من الرتبة الثانية حيث تتميز دالة الارتباط الذاتي النظرية $\rho(k)$ لهذه العمليات بالانقطاع التام بعد الفجوة الزمنية الثانية كما في شكل (1.a). العينة التي تنتمي إلى هذه العلميات قد لا تنتج دالة ارتباط ذاتي مقدرة $r(k)$ تنقطع تمامًا بعد الفجوة الزمنية الثانية، ولكنها قد تنتج دالة ارتباط ذاتي مقدرة تشبه شكل (1.b)



شكل (1)**: دالة ارتباط ذاتي ودالة ارتباط ذاتي مقدرة لعمليات** (2) MA

ويعني هذا أن العينة المولدة من عمليات MA(2) قد تنتج دالة ارتباط ذاتي مقدرة لها قيمتان كبيرتان عند الفجوتين الزمنيتين الأولي والثانية ومعاملات ارتباط ذاتي صغيرة (لا تساوي الصفر بالضبط) تبدوا وكأنه يمكن اعتبار أن معاملات الارتباط الذاتي النظرية عند الفجوات الزمنية المناظرة لا تختلف معنويًا عن الصفر. وهنا يثار السؤال الهام كيف يمكن اختبار معنوية هذه المعاملات؟ قبل الإجابة على هذا السؤال افترض أن الاختبارات الإحصائية قد أدت إلى رفض معنوية هذه المعاملات، فهذا يعني أنه يمكن القول بأن النموذج الملائم للسلسلة الزمنية المرصودة هو MA(2). والآن نعود إلى السؤال الخاص بكيفية اختبار مثل هذه الفروض الإحصائية. في الواقع أن أول عمل يمكن الإستفادة به هو ما قام به (1946) Bartlett والذي أعطي تباينات تقريبية لمعاملات الارتباط الذاتي المقدرة من العينات (السلاسل) المولدة من نموذج MA(q) وذلك للفجوات الزمنية $k>q$ على الصورة

$$\text{Var}[r(k)] \approx \frac{1}{n}[1 + 2\sum_{j=1}^{q} \rho^2(j)] \quad ; k = q+1, q+2, \cdots$$

ومن ثم يمكن الحصول على الأخطاء المعيارية (SE) للمقدرات $r(k)$ بصورة تقريبية بوضع $r(k)$ بدلاً من $\rho(k)$ في هذه الصيغة وأخذ الجذر التربيعي كما يلي

$$\text{SE}[r(k)] \approx \sqrt{\frac{1}{n}[1 + 2\sum_{j=1}^{q} r^2(j)]} \quad ; k = q+1, q+2, \cdots$$

وهذه النتائج صالحة إذا كان حجم العينة (طول السلسلة) كبيرًا.

العمل الثاني الذي يمكن الاستفادة به هوما قام به Anderson (1942) والذي أوضح أن لحجم العينة المعتدل وبافتراض أن $\rho(k) = 0$ فإن مقدر العينة المناظر $r(k)$ يتبع تقريبًا التوزيع المعتاد. ومن ثم فإن الإحصاء.

$$Z = \frac{r(k)}{\text{SE}[r(k)]}$$

يتبع تقريبًا التوزيع المعتاد القياسي بافتراض صحة الفرض $\rho(k) = 0$، وبالتالي يمكن استخدامه لاختبار الفروض

$$H_0 : \rho(k) = 0 \quad ; \text{H}_1 : \rho(k) \neq 0 \quad ; k = q+1, q+2, \cdots$$

ونرفض الفرض العدمي $\rho(k) = 0$ بمستوى معنوية α إذا كان

$$|Z| > z_{\alpha/2}$$

حيث تعرف القيمة $z_{\alpha/2}$ بأنها قيمة المتغير Z التي تحصر على [illegible]ها مساحة مقدارها $\alpha/2$، وبصورة رياضية هي القيمة التي تحقق المتباينة

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

وعلى الرغم من أنه قد جرت العادة في التطبيقات العملية على رفض الفرض العدمي $\rho(k)=0$ إذا كانت $|Z|>2$ أي بافتراض أن مستوي المعنوية $\alpha=0.05$ فإنه يجب لفت نظر القارئ أنه ليس من المفضل دائمًا تثبيت قيمة α عند قيمة معينة لاختبار معاملات الارتباط الذاتي عند كل الفجوات، فقد أفرزت بعض الدراسات الحديثة عن حقيقة هامة وهي أنه من الأفضل عادة استخدام قيمة كبيرة لمستوي المعنوية α عند الفجوات الزمنية الأولى ثم استخدام قيمة أصغر عند الفجوات التالية. بالطبع يعتمد اختيار قيم α على حكم وتقدير الباحث ومدى خبراته وكيفية قراءته للأشكال البيانية المختلفة.

ويمكن توظيف الإحصاء Z السابق لاختبار انقطاع دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ بعد فجوة زمنية معينة. فعادة ما يحدث انطباع مبدئي للباحث – بعد مشاهدة الدالة المقدرة $r(k)$ – بأن دالة الارتباط الذاتي النظرية للعملية العشوائية التي ولدت السلسلة (العينة) المرصودة تنقطع بعد فجوة زمنية معينة- ولتكن الفجوة الزمنية q- وعليه يستدل على ذلك إحصائيًا باختبار معنويات معاملات الارتباط الذاتي $\rho(k)$ بعد الفجوة الزمنية q. فالانطباع المبدئي بعد رؤية شكل (1.b) أن الدالة النظرية تأخذ شكل (1.a)، وهذه الحالة نبدأ باختبار الفرض $H_0:\rho(3)=0 \quad ; \; H_1:\rho(3)\neq 0$ فإذا تم قبول هذا الفرض يجب أن نختبر الفرض $H_0:\rho(4)=0 \quad ; \; H_1:\rho(4)\neq 0$ فإذا تم قبول هذا الفرض أيضًا يتم اختبار معنوية $\rho(5)$ وهكذا. وعادة ما تكون نتائج الاختبارات واضحة خاصة أنه يمكن مقارنة $r(k)$ بضعف الخطأ المعياري مباشرة دون الحاجة إلى حساب الإحصاء Z، فيرفض الفرض العدمي $\rho(k)=0$ إذا كانت

$$|r(k)|>2SE[r(k)] \quad ; \quad k=q+1,q+2,\cdots$$

ويلاحظ أن الطرف الأيمن لهذه المتباينة قيمة ثابتة لكل الاختبارات لأن الخطأ المعياري يعتمد على q ولا يعتمد على k.

والآن جاء دور الحديث عن دالة الارتباط الذاتي الجزئي، كيف يمكن اختبار معنويات معاملات الارتباط الذاتي الجزئي؟.. كيف يمكن استخدام هذه الاختبارات في التعرف على نماذج AR(p) وتمييز رتبتها؟ للإجابة عن هذين السؤالين نجد أن نفس بحث أندرسون السابق قد أوضح أيضًا أنه إذا كان حجم العينة معتدلاً فإن مقدر معامل الارتباط الذاتي الجزئي يتبع تقريبًا التوزيع المعتاد بافتراض أن معامل الارتباط الجزئي المناظر $\phi_{kk} = 0$. بالإضافة إلى ذلك فقد جاء في بحث Quenouille(1949) شكل تقريبي للخطأ المعياري لمقدرات معاملات الارتباط الذاتي الجزئي المحسوبة من العينات (السلاسل) المولدة من نموذج AR(P) وذلك للفجوات الزمنية k>p على الصورة

$$SE(\hat{\phi}_{kk}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad k > p$$

ومن ثم فإن الإحصاء

$$Z = \hat{\phi}_{kk}\sqrt{n}$$

يتبع تقريباً التوزيع المعتاد القياسي بافتراض صحة الفرض $\phi_{kk} = 0$، وبالتالي يمكن استخدامه لاختبار الفروض

$$H_0 : \phi_{kk} = 0 \quad ; \; H_1 : \phi_{kk} \neq 0 \qquad ; k = p+1, p+2, \cdots$$

ويرفض الفرض العدمي في $\phi_{kk} = 0$ بمستوي معنوية α إذا كان $|Z| > z_{\alpha/2}$. وبناءً على ذلك يمكن استخدام هذا الإحصاء لاختبار انقطاع دالة الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} بعد فجوة زمنية معينة p باختبار معنويات معاملات الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk}. بعد الفجوة الزمنية p، فإذا كانت هذه المعاملات لا تختلف معنويًا عن الصفر فإنه يمكن قبول الفرض بأن الدالة النظرية ϕ_{kk} تنقطع بعد الفجوة الزمنية p وبذلك يتم اختيار الرتبة المناسبة لنماذج AR(p)

ولكن كيف يمكن التعرف على الرتبتين $p,\ q$ إذا كانت كل من دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي الجزئي تتلاشى ولا تنقطع؟. في الواقع أن نماذج AR(p) ونماذج MA(q) لا تكون ملائمة في هذه الحالة وأنه يجب استخدام أحد النماذج المختلطة ARMA(p,q) حيث $p \neq 0\ ;\ q \neq 0$. والتعرف على رتبة النموذج المختلط (p,q) أصعب كثيرًا وأكثر تعقيدًا من التعرف على رتبة النموذج البحت AR(p) أو رتبة النموذج البحت MA(q). ولذا فقد رأينا أنه من الأفضل أن نفرد جدول (2) لتلخيص خصائص دالتي الارتباط الذاتي لأهم النماذج المختلطة حيث $0 < p \leq 2\ ;\ 0 < q \leq 2$. وقد اكتفينا بدالة الارتباط الذاتي فقط لأن دالة الارتباط الذاتي الجزئي أكثر تعقيدًا ومن الصعب استخدامها في التعرف على رتبة النموذج المختلط.

جدول (2): خصائص دالة الارتباط الذاتي لبعض نماذج ARMA المختلطة

النمط العام للمعاملات التي لها نمط عام	المعاملات التي لها نمط عام	المعاملات التي ليس لها نمط عام	q-p	المعاملات التي تعتمد على الجزء الخاص بالمتوسطات المتحركة	النموذج
مشابه لنماذج AR(1) أي تتلاشى بشكل أسي أو بشكل متردد في الإشارة	$\rho(1), \rho(2), \cdots$	$\rho(0)$	0	$\rho(1)$	ARMA (1,1)
مشابه لنماذج AR(1)	$\rho(2), \rho(3), \cdots$	$\rho(0), \rho(1)$	1	$\rho(1), \rho(2)$	ARMA (1,2)
مشابه لنماذج AR(2) أي تتلاشى بشكل أسي أو متردد في الإشارة أو في شكل موجات من دالة الجيب	$\rho(1), \rho(2), \cdots$	$\rho(0)$	0	$\rho(1), \rho(2)$	ARMA (2,2)
مشابه لنماذج AR(2)	$\rho(0), \rho(1), \rho(2) \cdots$	لا يوجد	-1	$\rho(1)$	ARMA (2,1)

وفي مرحلة التعرف على النموذج يجب على الباحث أن يضع نصب عينيه جدول (2) عندما يكون على قناعة بأنه لا يمكن اختيار أحد النماذج البحتة من بين عائلة النماذج AR(p) أو عائلة النماذج MA(q) أي عندما يكون تقديره الشخصي بأن كل من الدالتين $\rho(k)$ و ϕ_{kk} لا تنقطع. وعلى الباحث أن يقرر أولاً متى تبدأ دالة الارتباط الذاتي في أن يكون لها نمطا معينا يمكن التعرف عليه. ويمكن هنا تمييز ثلاث بدايات مختلفة كما جاءت في جدول (2)هي

1- أن يبدأ هذا النمط من $\rho(1)$ وفي هذه الحالة قد يكون النموذج ARMA(1,1) هو الأنسب

للسلسلة محل الدراسة إذا كان هذا النمط مشابه لدالة الارتباط الذاتي لنماذج AR(1). أما إذا كان النمط مشابهاً لدالة الارتباط الذاتي لنماذج AR(2) فإن النموذج ARMA(2,2) قد يكون الأنسب لسلوك السلسلة موضع الدراسة.

2- أن يبدأ النمط العام لدالة الارتباط الذاتي من $\rho(2)$ ويكون مشابهًا لنمط هذه الدالة في نماذج AR(1)، وفي هذه الحالة قد يكون نموذج ARMA (1, 2) هو الأنسب للسلسلة موضع الدراسة.

3- أن يبدأ النمط العام لدالة الارتباط الذاتي من $\rho(0)$ ويكون مشابهًا لسلوك هذه الدالة في نماذج AR(2)، وفي هذه الحالة قيد يكون النموذج ARMA(2, 1) هو الأفضل في تمثيل السلسلة موضع الدراسة.

ولا يخفى على القارئ في التعرف على النموذج المختلط مقدار الحس العالي المطلوب من الباحث للحكم على نمط دالة الارتباط الذاتي ومن أين يبدأ. وربما يمثل هذا الجزء أصعب مراحل تطبيق منهجية بوكس وجينكنز، وهى صعوبة لا ننكرها بل نؤكد عليها ونعتبرها أحد العيوب الأساسية لهذه المنهجية وأحد أسباب توجهات الأبحاث الحديثة لإيجاد أسلوب أسهل وأكثر موضوعية للتعرف على النموذج المبدئي للبيانات. ولكن لحسن الحظ أن النموذج ARMA (1, 1) عادة ما يكون ملائمًا في كثير من التطبيقات التي تتطلب اختيار نموذج مختلط.

مثال (1):

البيانات الآتية توضح دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لسلسلة زمنية طولها 100 مشاهدة. حدد نموذج مبدئي ملائم للسلسلة.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r(k)	0.405	-0.073	0.08	0.11	0.092	-0.09	0.1	0.1	-0.09	0.052
$\hat{\phi}_{kk}$	0.405	0.32	0.24	-0.11	0.09	-0.02	0.01	0.03	-0.05	0.03

الحـــــل:

تبدو دالة الارتباط الذاتي كأنها تنقطع بعد الفجوة الزمنية الأولـــى، ومــن ثــم نجرى أولاً اختبار معنوية $\rho(1)$ بافتراض أن العملية العشوائية التي ولدت البيانـــات عملية عشوائية بحتة أي عملية اضطرابات هادئة، وهذا يعني أن $q = 0$. ومن ثم فإن لكل الفجوات نجد أن

$$SE[r(k)] \approx \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = 0.1 \quad , \; k = 1, 2, \cdots$$

ولاختبار الفرض

$$H_0 : \rho(1) = 0 \quad ; \; H_1 : \rho(1) \neq 0$$

نستخدم الإحصاء

$$|Z| = \frac{r(1)}{SE[r(1)]}$$

$$\approx \frac{0.405}{0.1} \cong 4.05 > 2$$

ومن ثم نرفض H_0 ونستدل من ذلك على اختلاف معنوية $\rho(1)$ عــن الــصفر وأن العملية العشوائية لا يمكن أن تكون عملية عشوائية بحتة.

والسؤال الآن الذي يطرح نفسه هو هل ممكن اعتبار كل معاملات الارتباط الذاتي الأخرى غير معنوية؟ لذلك يجب حساب الخطأ المعياري بافتراض أن العملية هي MA(1)، أي أن

$$SE[r(k)] \approx \sqrt{\frac{1}{n}[1+2r^2(1)]} \approx \sqrt{\frac{1}{100}[1+2(0.405)^2]}$$

$$\approx 0.115 \quad , k > 1$$

$$2SE[r(k)] \approx 2(0.115) = 0.23 \quad ; k > 1$$

وبفحص معاملات الارتباط المقدرة نجد أن $|r(k)| < 0.23$ لكل قيم $k = 2, 3, \ldots$ ومن ثم لا يوجد سبب للقول بأن دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ لا تنقطع بعد الفجوة الزمنية الأولى وبالتالي فإن النموذج MA(1) يبدو ملائمًا لشرح سلوك هذه السلسلة خاصة أنه يمكن اعتبار أن الدالة ϕ_{kk} يحدها دالة أسية

مثال (2):

البيانات الآتية توضح دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لسلسلة زمنية طولها 92 مشاهدة. حدد نموذج مبدئي ملائم للسلسلة

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R(k)	0.66	0.42	0.29	0.19	0.09	-0.01	0.01	0.02	0.01
$\hat{\phi}_{kk}$	0.66	0.39	0.01	0.02	-0.01	-0.03	0.02	0.01	0.01

الحـــــل:

تبدو دالة الارتباط الذاتي الجزئي وكأنها تنقطع بعد الفجوة الزمنية الثانية ، ومن ثم يجب اختبار معنوية ϕ_{22} أولاً بافتراض أن العملية التي ولدت البيانات هي عملية AR(1)، ومن ثم فإن

$$SE\,(\hat{\phi}_{22}) \approx \sqrt{\frac{1}{n}} \approx 0.104$$

ولاختبار الفرض

$$H_0 : \phi_{22} = 0 \qquad ; \; H_1 : \phi_{22} \neq 0$$

نستخدم الإحصاء

$$|Z| = \frac{\hat{\phi}_{22}}{SE(\hat{\phi}_{22})}$$

$$= \frac{0.39}{0.104} = 3.7 \; > \; 2$$

ويستدل من ذلك على اختلاف ϕ_{22} معنويًا عن الصفر، ومن ثم لا يمكن أن تكــون العملية التي ولدت البيانات هي عملية AR(1). بافتراض أن العملية العــشوائية هــي AR(2) فإن الخطأ المعياري لكل الفجوات $k > 2$ يكون

$$SE\,[\hat{\phi}_{kk}] \approx \sqrt{\frac{1}{n}} \cong 0.104 \qquad ; k > 2$$

$$2SE\,[\hat{\phi}_{kk}] \approx 0.208 \qquad ; k > 2$$

وبفحص معاملات الارتباط الجزئي نجد أن $\left|\hat{\phi}_{kk}\right| < 0.208$ لكل قــيم ... $k = 3, 4,$ ومن ثم لا يوجد دليل للقول بأن دالة الارتباط الذاتي الجزئي لا تنقطع فجأة بعد الفجوة الزمنية الثانية، وبالتالي فن النموذج AR(2) يبدو ملائمًا لشرح سلوك هــذه السلــسلة خاصة أن دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ تبدو وكأنها تتناقص بشكل أسي.

ويلاحظ هنا أنه في حالة النماذج AR(p) لا يختلف الخطأ المعياري باختلاف رتبة النموذج ولذلك يمكن اختبار معنوية جميع معاملات الارتباط بمقارنة معــاملات الارتباط المقدرة بضعف الخطأ المعياري مباشرة.

مثال (3):

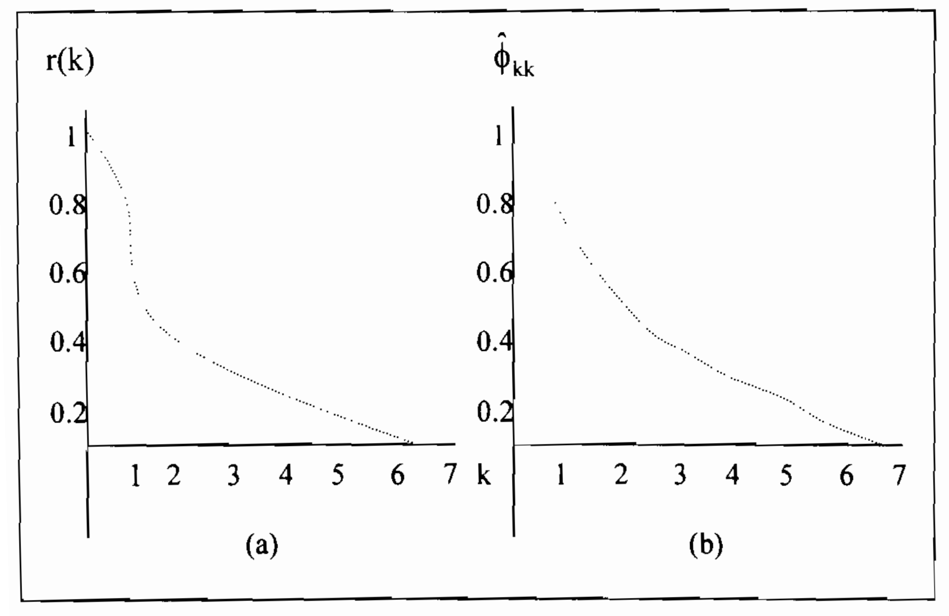
توضح البيانات الآتية دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لعدد حوادث المرور الشهري التي وقعت في إحدى المدن

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r(k)	0.85	0.45	0.28	0.15	0.10	0.06	0.03	0.02	0.01
$\hat{\phi}_{kk}$	0.85	0.61	0.45	0.40	0.30	0.20	0.11	0.10	0.05

حدد نموذج مبدئي ملائم لشرح سلوك سلسلة الحوادث إذا كان طول السلسلة 400 شهر

الحـــــل:

واضح أن كل من الدالتين تتناقص ولا تنقطع بعد فجوة قصيرة(1 أو 2). ومن ثم قد يبدو أن النموذج المختلط أفضل في تمثيل سلسلة عدد الحوادث. وقد يكون من الأفضل رسم الدالتين بيانيًا في شكل (2)



شكل (2): دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لمثال (3)

في الشكل (2.a) تتناقص r(k) بشكل أسي مشابه لدالة الارتباط الذاتي لنماذج AR(1) بدءًا من r(1) وليس من r(0)، وهذا يعني أن النموذج ARMA(1,1) قد يكون مناسبًا لتمثيل سلسلة الحوادث. ويؤيد هذا الاختيار نمط $\hat{\phi}_{kk}$ والذي يبدو وكأنه مشابه لــنمط الدالة ϕ_{kk} لنماذج MA(1) أي يحده دالة أسية.

مثال (4):

البيانات الآتية توضح دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لمتوسـط درجـة الحرارة السنوية في أحدى المدن

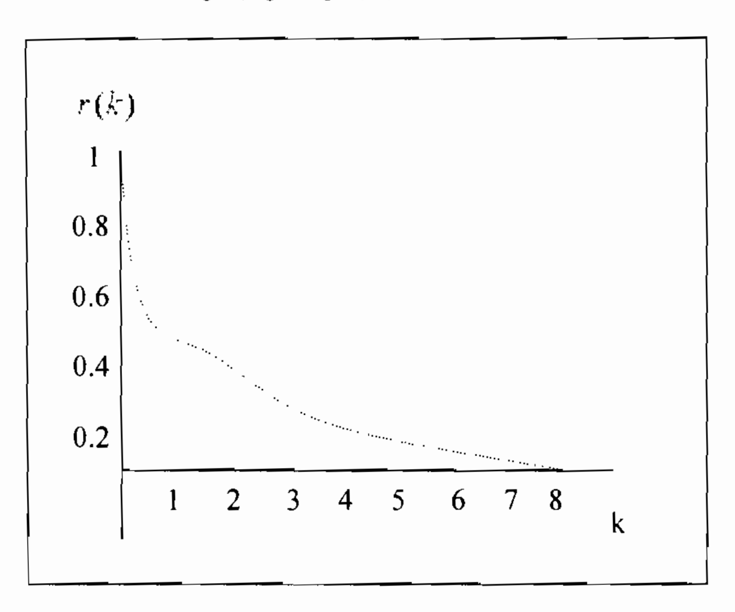
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r(k)	0.5	0.48	0.33	0.2	0.17	0.12	0.08	0.05	0.04
ϕ_{kk}	0.5	0.42	0.31	0.21	0.13	0.07	0.01	0.02	0.01

حدد نموذجًا مبدئيًا للسلسلة إذا كان طول السلسلة 100 سنة

الحـــــل:

واضح أن كل من الدالتين تتناقص ولا تنقطع بعد فجوة قصيرة، ومن ثم قــد يبدو أن النموذج المختلط الأفضل في تمثيل سلسلة درجة الحرارة. ولتحديد رتبة هــذا النموذج من الأفضل رسم دالة الارتباط الذاتي r(k).

واضح أن النمط العام للدالة r(k) يبدأ من الفجوة الزمنية الثانية ويشابه دالــة الارتباط الذاتي لنماذج AR(1). بمقارنة هذا الشكل بالجدول (2) يمكن القــول بــأن النموذج ARMA(1,2) قد يكون مناسبًا لتمثيل بيانات درجة الحرارة.



شكل (3): دالة الارتباط الذاتي لمثال (4)

4.2 التقدير Estimation

بعد الانتهاء من مرحلة التعرف على النموذج المبدئي الملائم للبيانات المتاحة يجب تقدير معالم هذا النموذج باستخدام إحدى الطرق المعروفة في نظرية الإحصاء وأهمها طريقتي المربعات الصغرى والإمكان الأكبر. ويهدف هذا المبحث إلى تقديم الفلسفة العامة لاستخدام هاتين الطريقتين لتقدير معالم نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة والنماذج المختلطة.

4.2.1 تقدير معلمة نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى

بافتراض سكون النموذج AR(1) وبافتراض أن لدينا سلسلة زمنية مكونة من المشاهدات $y_1, y_2, \ldots, y_n$ أوضحنا أنه يمكن كتابة هذا النموذج على الصورة

$$y_t = \phi\ y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad ;\ t = 1, 2, \ldots, n \qquad ; |\phi| < 1 \qquad (4.2.1)$$

والمشكلة التي نحن بصددها الآن هو تقدير المعلمة ϕ باستخدام البيانات المتاحة $y_1, y_2, \ldots, y_n$، وسندرس هنا أربعة أنواع من التقديرات هي:

- تقدير المربعات الصغرى الشرطي.
- تقدير الإمكان الأكبر الشرطي.
- تقدير الإمكان الأكبر غير الشرطي (المضبوط) .
- تقدير المربعات الصغرى غير الشرطي (المضبوط) .

وفيما يلي عرضًا مفصلاً لكل نوع من هذه التقديرات

تقدير المربعات الصغرى الشرطي

لا يخفى على القارئ التشابة الكبير بين النموذج AR(1) والمعرف في الصورة (4.2.1) ونموذج الانحدار الخطي البسيط حيث يلعب المتغير العشوائي y_t دور المتغير التابع ويلعب المتغير y_{t-1} دور المتغير المفسر (المستقل)، بينما يلعب ε_t دور الأخطاء الحقيقية. وحيث أن النموذج AR(1) خطي في المعلمة ϕ فإنه يمكن تطبيق القواعد والأحكام الخاصة بنموذج الانحدار البسيط واضعين في الاعتبار أن مقدر المربعات الصغرى للمعلمة ϕ قد لا يحقق الصفات المثالية التي نعرفها عن مقدرات المربعات الصغرى العادية وذلك نظرًا لأن المتغير المفسر هنا y_{t-1} هو متغير عشوائي بينما تفترض دراسة نموذج الانحدار البسيط التقليدية عدم عشوائية هذا المتغير. ولحسن الحظ – وعلى الرغم من هذا الاختلاف– فقد أثبت Mann-Wald (1943)أن الخصائص الأساسية لتباين مقدر المربعات الصغرى للمعلمة ϕ تظل صحيحة تقاربيًا أي عندما يؤول طول السلسلة (حجم العينة) n إلى ∞.

وثمة مشكلة أخرى تنفرد بها نماذج الانحدار الذاتي وهي مشكلة القيم الإبتدائية. وتتلخص هذه المشكلة في حالة نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى في أنها لا يمكن حساب الخطأ الأول ε_1 من مشاهدات السلسلة المتاحة $y_1, y_2, \ldots, y_n$

نظرًا لأن الخطأ ε_1 يعتمد على القيمة y_0 غير المرئية. ولكن بالطبع يمكن حساب جميع الأخطاء الأخرى $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ باستخدام بيانات السلسلة المتاحة. ولكن إذا كان طول السلسلة n كبيرًا فإن تأثير ε_1 سيكون صغيرًا ومن ثم يمكن افتراض أنه يساوي الصفر، وبذلك يكون مجموع مربعات الأخطاء الشرطي

$$S(\phi|\varepsilon_1 = 0) = \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 \qquad (4.2.2)$$

تقريب ملائم لمجموع مربعات الأخطاء الكلي $\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2$. بالتعويض من المعادلة (4.2.1) في المعادلة(4.2.2) يمكن كتابة مجموع مربعات الأخطاء الشرطي على الصورة

$$S(\phi|\varepsilon_1 = 0) = \sum_{t=2}^{n} (y_t - \phi y_{t-1})^2 \qquad (4.2.3)$$

بمساواة تفاضل المعادلة (4.2.3) بالصفر لإيجاد مقدر المربعات الصغرى

$$-2\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}(y_t - \hat{\phi} y_{t-1}) = 0$$

ومن ثم فإن

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2} \qquad (4.2.4)$$

ويسمي المقدر (4.2.4) بمقدر المربعات الصغرى الشرطي ويرمز له عادة بالرمز $\hat{\phi}_c$.

تقدير الإمكان الأكبر الشرطي

كما هو معروف من نظرية الإحصاء أن إيجاد تقدير الإمكان الأكبر يستلزم افتراض توزيع إحتمالي معين للإخطاء أو الاضطرابات ε_t. فإذا افترضنا أن الاضطرابات الهادئة $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس فإن الاضطرابات في هذه الحالة تكون

مستقلة لأنها غير مرتبطة بالتعريف. ومن ثم يمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ على الصورة

$$f(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n) = \left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-(n-1)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2\right) \qquad (4.2.5)$$

إذا افترضنا أن المتغير الإبتدائي Y_1 يظل ثابتًا عند القيمة y_1 فإنــه يمكــن تحويــل المتغيرات $(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n)$ إلى المتغيرات $(Y_2, Y_3, \ldots, Y_n)$
كما يلي

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= y_2 - \phi\, y_1 \\ \varepsilon_3 &= y_3 - \phi\, y_2 \\ &\vdots \\ \varepsilon_n &= y_n - \phi\, y_{n-1} \end{aligned}$$

وبالتالي يكون جاكوبيان التحويلات

$$|J| = \left|\frac{\partial(\varepsilon)}{\partial(y)}\right| = 1$$

ومن ثم فإن دالة كثافة الاحتمــال الــشرطية للمتغيــرات $y_2, y_3, \ldots, y_n$ بمعلوميــة أن $Y_1 = y_1$ هي

$$g(y_2, y_3, \ldots, y_n \mid Y_1 = y_1) = \left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-(n-1)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(y_t - \phi y_{t-1})^2\right]$$

(4.2.6)

إذا كان طول السلسلة n كبيرًا فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطية(4.2.6) تكون تقريــب جيد لدالة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. ومن ثم يمكن اســتخدام (4.2.6) كتقريب ملائم لدالة الإمكان المضبوطة exact للمعلمتين ϕ, σ^2 كما يلي

$$L^*(\phi,\sigma^2 \mid y_1, y_2, \ldots, y_n) = \left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-(n-1)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(y_t - \phi y_{t-1})^2\right]$$

(4.2.7)

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln(L^*) = -(n-1)\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(y_t - \phi y_{t-1})^2$$

$$\frac{d\ \ln(L^*)}{d\phi} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}(y_t - \phi y_{t-1})$$

بمساواة هذا التفاضل بالصفر يمكن بسهولة إثبات أن مقدر الإمكان الأكبر الشرطي يمكن أن يكتب على الصورة

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2}$$

وهو نفس مقدر المربعات الصغرى الشرطي (4.2.4). أي أن تقدير الإمكان الأكبر الشرطي يساوي تقدير المربعات الصغرى الشرطي إذا افترضنا أن الاضطرابات الهادئة $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس.

تقدير الإمكان الأكبر (والمربعات الصغرى) غير الشرطي

بافتراض أن $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس وبافتراض أن $\mu = 0$ فإن المتغير العشوائي Y_1 يتبع توزيع معتاد توقعه الصفر وتباينه $\frac{\sigma^2}{(1-\phi^2)}$، راجع تباين عمليات AR(1) في الباب السابق، ومن ثم فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير Y_1 يمكن أن تكتب على الصورة

$$g(y_1) = \frac{(1-\phi^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \exp\left[-\frac{(1-\phi^2)y_1^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (4.2.8)$$

لإيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة غير الشرطية (المضبوطة) للمتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ يجب ضرب دالة كثافة الاحتمال الهامشي $g(y_1)$ المعرفة في الصورة (4.2.8) في دالة كثافة الاحتمال الشرطي $g(y_2, y_3, \ldots, y_n \mid y_1)$ والمعرفة في الصورة (4.2.6) أي أن

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} (1-\phi^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y_1^2(1-\phi^2) + \sum_{t=2}^{n}(y_t - \phi y_{t-1})^2\right]\right\} \qquad (4.2.9)$$

وتمثل هذه الدالة دالة الإمكان غير الشرطية $L(\sigma^2, \phi \mid y_1, y_2, \ldots, y_n)$. بأخذ لوغاريتم هذه الدالة نصل إلى

$$\ln(L) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2}\ln(1-\phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\left[y_1^2(1-\phi^2) + \sum_{t=2}^{n}(y_t - \phi y_{t-1})^2\right]$$

بتفاضل $\ln(L)$ بالنسبة للمعلمة ϕ ومساواة التفاضل بالصفر

$$\frac{d\ln(L)}{d\phi} = -\frac{\hat{\phi}}{1-\hat{\phi}^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\left[-2\hat{\phi}y_1^2 - 2\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}(y_t - \hat{\phi}y_{t-1})\right] = 0 \qquad (4.2.10)$$

المعادلة (4.2.10) من الدرجة الثالثة في $\hat{\phi}$ ولا يوجد صيغة تحليلية بدلالة بيانات السلسلة مباشرة لهذا المقدر. ومن ثم يجب حل هذه المعادلة بإحدى الطرق العددية . والسبب الأساسي في عدم وجود مثل هذه الصيغة يعود إلى وجود الكمية $\ln(1-\phi^2)$ في لوغاريتم دالة الإمكان. وقد أوضح Box – Jenkins (1976) أنه يمكن إهمال تأثير

هذه الكمية في حالة السلاسل الطويلة أي عندما تؤول n إلى ∞. وفي هذه الحالة يمكن كتابة لوغاريتم دالة الإمكان بطريقة تقريبية على الصورة

$$\ln(L) \approx = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\left[y_1^2(1-\phi^2) + \sum_{t=2}^{n}(y_t - \phi y_{t-1})^2\right]$$

$$\frac{d\ \ln\ (L)}{d\phi} \approx -\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2\phi\ y_1^2 - 2\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}(y_t - \phi\ y_{t-1})\right]$$

بمساواة هذا التفاضل بالصفر نصل إلى

$$\hat{\phi}y_1^2 + \sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1} - \hat{\phi}\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2 = 0$$

$$-\hat{\phi}\ [-y_1^2 + \sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2] + \sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1} = 0$$

$$-\hat{\phi}\sum_{t=3}^{n} y_{t-1}^2 = -\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1}$$

$$\hat{\phi}_u = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=3}^{n} y_{t-1}^2} \qquad (4.2.11)$$

ويعرف هذا المقدر والذي نرمز له بالرمز $\hat{\phi}_u$ بمقدر المربعات الصغرى غير الشرطي أو المضبوط exact وهو تقريب جيد لمقدر الإمكان غير الشرطي في حالة السلاسل الطويلة.

تقدير تباين الاضطرابات الهادئة

عادة ما يكون تباين الاضطرابات الهادئة σ^2 غير معروف، وفي هذه الحالة يمكن اعتباره بمثابة معلمة إضافية في دالة الإمكان الشرطية (4.2.7) ودالة الإمكان

غير الشرطية (4.2.9). فإذا أردنا إيجاد تقدير الإمكان الأكبر الشرطي للمعلمة σ^2 يمكن تعظيم الدالة (4.2.7)، وبسهولة يمكن إثبات أن هذا التقدير هو

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n}[y_t - \hat{\phi}_c y_{t-1}]^2$$

حيث يمثل $\hat{\phi}_c$ تقدير المربعات الصغرى (الإمكان الأكبر) الشرطي والمحسوب من الصورة(4.2.4). كما يمكن إيجاد تقدير الإمكان الأكبر غير الشرطي (المضبوط) للمعلمة σ^2 بتعظيم الدالة (4.2.9)، وبسهولة يمكن إثبات أن هذا التقدير هو (بإهمال $\ln(1-\phi^2)$).

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n}[y_1^2(1-\hat{\phi}_u^2) + \sum_{t=2}^{n}(y_t - \hat{\phi}_u y_{t-1})^2]$$

حيث يمثل $\hat{\phi}_u$ في هذه الحالة تقدير الإمكان الأكبر غير الشرطي المحسوب من الصورة(4.2.11).

التقديران $\hat{\sigma}_c^2$ و $\hat{\sigma}_u^2$ متحيزان للمعلمة σ^2، ولكن يمكن إيجاد تقدير غير متحيز تقريبي على نمط الانحدار البسيط التقليدي كالأتي

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{t=2}^{n}[y_t - \hat{\phi}_c y_{t-1}]^2$$

حيث يمثل $\hat{\phi}_c$ تقدير المربعات الصغرى الشرطي المحسوب من الصورة (4.2.4). والسبب في اعتبار المقام (n-2) في هذا التقدير هو أن عدد الحدود الفعال في مجموع المربعات هو (n-1) فقط وأن عدد المعالم المقدرة في هذا المجموع هو 1. لمزيد من التفاصيل أنظر Scheffe (1959)

مثال (5):

إذا كانت العملية $\{y_t\}$ تتبع نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى بمعلمة ϕ. إحسب تقديري المعلمتين ϕ و σ^2 بجميع الطرق الممكنة باستخدام البيانات الآتية

$$y_t: \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1$$

الحـــــــل:

$$\hat{\phi}_c = \frac{y_2 y_1 + y_3 y_2 + y_4 y_3 + y_5 y_4}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}$$

$$= \frac{3(1) + 1(3) + 2(1) + 1(2)}{1 + 9 + 1 + 4} = \frac{10}{15} = 0.67$$

ويمثل هذا التقدير تقدير المربعات الصغرى الشرطي ويساوي تقدير الإمكان الأكبـــر الشرطي

$$\hat{\phi}_u = \frac{y_2 y_1 + y_3 y_2 + y_4 y_3 + y_5 y_4}{y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} = \frac{10}{14} = 0.71$$

ويمثل هذا التقدير تقدير المربعات الصغرى غير الشرطي ويمكن استخدامه كتقريـــب لتقدير الإمكان الأكبر غير الشرطي (المضبوط).

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{4}\sum_{t=2}^{5}[y_t - 0.67\, y_{t-1}]^2 = \frac{1}{4}[(2.33)^2 + (-1.01)^2 + (1.33)^2 + (-0.34)^2]$$
$$= 2.083$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{5}\,[y_1^2(1 - 0.\overset{2}{7}1) + \sum_{t=2}^{5}(y_t - 0.71\, y_{t-1})^2] = 1.771$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3}\sum_{t=2}^{5}[y_t - 0.67\, y_{t-1}]^2 = 2.78$$

4.2.2 تقدير معالم نماذج الانحدار الذاتي العامة

بافتراض أن المعاملات $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ تحقق شروط السكون وبافتراض أن لدينا السلسلة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ فإن المشكلة هي تقدير المعالم $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ للنماذج AR(p) والمعرفة على الصورة.

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad ; \; t = 1, 2, \ldots, n \qquad \textbf{(4.2.12)}$$

تقديرات المربعات الصغرى الشرطية

تمثل هذه النماذج انحدار المتغير y_t على المتغيرات المفسرة (المستقلة) $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-p}$. وصورة النماذج (4.2.12) تشبه إلى حد كبير نماذج الانحدار العام التقليدية حيث يلعب المتغير y_t دور المتغير التابع وتلعب المتغيرات $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-p}$ دور المتغيرات المفسرة، بينما يلعب ε_t دور الأخطاء الحقيقية. ولكن هذا التشابة ليس كاملاً لأن المتغيرات المفسرة (المستقلة) عشوائية ومرتبطة، ومن ثم فإن تقديرات المربعات الصغرى العادية قد لا تحقق الخصائص المثالية، ولكن Mann – Wald (1943) أوضحا أن الخصائص الأساسية لتباينات وتغايرات المقدرات تظل صحيحة تقاربيًا، ومن ثم يمكن تطبيق الآلية العادية لاشتقاق مقدرات المربعات الصغرى. والمشكلة الأخرى التي تواجهنا عند اشتقاق مثل هذه المقدرات هي استحالة حساب الأخطاء الابتدائية $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ من البيانات المتاحة لأنها تعتمد على القيم غير المرئية $y_0, y_{-1}, \ldots, y_{1-p}$. فعلى سبيل المثال نجد أن

$$\varepsilon_1 = y_1 - \phi_1 y_0 - \phi_1 y_{-1} - \cdots - \phi_p y_{1-p} \qquad ; \quad p \geq 1$$

ولكن إذا كان طول السلسلة n كبيرًا بالنسبة للرتبة p – كما يحدث عادة في التطبيقات العملية– فإن مجموع مربعات الأخطاء الشرطي

$$S(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p \mid \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_p = 0) = \sum_{t=p+1}^{n} \varepsilon_t^2$$

يكون تقريب جيد لمجموع مربعات الأخطاء الكلي $\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2$. وفي هذه الحالة يكون

$$S(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p \mid \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_p = 0) = \sum_{t=p+1}^{n} [y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p}]^2$$
(4.2.13)

وبمفاضلة (4.2.13) بالنسبة للمعالم $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ ومساوات التفاضلات بالصفر نصل إلى

$$\frac{\partial S}{\partial \phi_i} = \sum_{t=p+1}^{n} y_{t-i} (y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-P}) = 0 \qquad ; \ i = 1, 2, \cdots, p$$

وهذا يؤدي إلى المعادلات الطبيعية الآتية

$$(X'X) \ \hat{\phi}_c = X' y$$

حيث X مصفوفة من الرتبة $(n-p)xp$ تمثل مشاهدات المتغيرات المفسرة وتأخذ الصورة

$$X = \begin{bmatrix} y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1 \\ y_{p+1} & y_p & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & y_{n-p} \end{bmatrix}$$

ويمثل y متجه عمودي من الرتبة (n-p) يمثل مشاهدات المتغير التابع ويأخذ الصورة

$$y = (y_{p+1} \quad y_{p+2} \quad \cdots \quad y_n)$$

ومن ثم فإن مقدرات المربعات الصغرى الشرطية يمكن أن تكتب على الصورة

$$\hat{\phi}_c = (X'X)^{-1}X'y \tag{4.2.14}$$

تقديرات الإمكان الأكبر الشرطية

بافتراض أن $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس فإن ε_t تكون مستقلة ويمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_n$ على الصورة

$$f(\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_n) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-(n-p)} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^{n} \varepsilon_t^2) \tag{4.2.15}$$

إذا افترضنا أن المتغيرات الابتدائية $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ تظل ثابتة عند القيم $y_1, y_2, \ldots, y_p$ فإنه يمكن تحويل المتغيرات $(\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_n)$ إلى المتغيرات $(Y_{p+1}, Y_{P+2}, \ldots, Y_n)$ كما يلي

$$\varepsilon_{p+1} = y_{p+1} - \phi_1 y_p - \phi_2 y_{p-1} - \cdots - \phi_p y_1$$

$$\varepsilon_{p+2} = y_{p+2} - \phi_1 y_{p+1} - \phi_2 y_p - \cdots - \phi_p y_2$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_n = y_n - \phi_1 y_{n-1} - \phi_2 y_{n-2} - \cdots - \phi_p y_{n-p}$$

ويمكن بسهولة إثبات أن الجاكوبيان يساوي الوحدة، وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغيرات $Y_{p+1}, Y_{P+2}, \ldots, Y_n$ عندما تظل المتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ ثابتة عند القيم $y_1, y_2, \ldots, y_p$ تكون

$$g(y_{p+1},\ldots,y_n \mid Y_1 = y_1,\cdots,Y_p = y_p) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-(n-p)}$$

$$\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=p+1}^{n}[y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p}]^2) \qquad (4.2.16)$$

وإذا كان طول السلسلة n كبيرًا بالنسبة للرتبة p فإن الدالة (4.2.16) تكون تقريب جيد لدالة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $(Y_1, Y_2,\ldots,Y_n)$ – انظر(1946) Bartlett– ومن ثم يمكن استخدام (4.2.16) كتقريب ملائم لدالة الإمكان المضبوطة (exat) للمعالم $\sigma^2,\ \phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p$ كما يلي

$$L^*(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p,\sigma^2 \mid y_1,y_2,\cdots,y_n) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-(n-p)}$$

$$\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=p+1}^{n}[y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p}]^2)$$

$$\ln\ (L^*) = -(n-p)\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=p+1}^{n}[y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p}]^2$$

ويعني هذا أن قيم المعالم $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p$ التي تجعل دالة الإمكان نهاية عظمى هي نفس القيم التي تجعل مجموع مربعات الأخطاء الشرطي $\sum_{t=p+1}^{n}[y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p}]^2$ أصغر ما يمكن، ومن ثم فإن مقدرات الإمكان الأكبر الشرطية لمعاملات النموذج $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p$ تساوي مقدرات المربعات الصغرى الشرطية التي تحسب بالصورة (4.2.14)

مثال(6):

إذا كانت العملية y_t تتبع نموذج AR(2)، إحسب تقديري المربعات الصغرى الشرطية لمعلمتي هذا النموذج من البيانات الآتية :

السنة	1991	1992	1993	1994	1995
المبيعات بالألف وحدة	2	1	2	3	2

الحـــل:

$$X=\begin{bmatrix} y_2 & y_1 \\ y_3 & y_2 \\ y_4 & y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \; X'X=\begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$$

$$y=[2 \quad 3 \quad 2]' \quad ; \; X'X\,'\,y=\begin{bmatrix} 14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 9 & -10 \\ -10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\phi}_c=(X'X)^{-1}X'y=\begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.54 \end{bmatrix}$$

وهي نفس تقديرات الإمكان الأكبر الشرطية

تقديرات الإمكان الأكبر (والمربعات الصغرى) غير الشرطية

لإيجاد دالـــة كثافـــة الاحتمـــال المـــشتركة المـــضبوطة exact للمتغيـــرات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ يجب ضرب دالة كثافة الاحتمال الشرطية (4.2.16) في دالة كثافـــة الاحتمال المشتركة للمتغيرات الابتدائية $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$. ودون الدخول في التفاصيل الدقيقة يمكن إثبات أن – بافتراض أن $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس – المتغيـــرات الابتدائيـــة $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ تتبع توزيع معتاد توقعه الصفر وله مصفوفة تباين وتغاير معروفـــة بدلالة المعالم سنرمز لها بالرمز $\sigma^2 T^{-1}(\phi)$. ومن ثم يمكن كتابة دالة كثافة الاحتمـــال المضبوطة أو دالة الإمكان المضبوطة على الصورة

$$L(\phi_1,\ldots,\phi_p,\sigma^2 \mid y_1,y_2,\ldots,y_n) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \mid T(\phi)\mid^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} t_{ij}(\phi)y_i y_j + S(\phi_1,\ldots,\phi_p \mid \varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_p=0)\right]\right\}$$

(4.2.17)

حيث $t_{ij}(\phi)$ هو العنصر رقم (i, j) في المصفوفة $T(\phi)$ و $\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_p)$

والكمية $S(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p \mid \varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_p=0)$ تعرف بالمعادلة (4.2.13)

بأخذ لوغاريتم الطرفيين

$$\ln L \propto -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \frac{1}{2}\ln\mid T(\phi)\mid - \frac{1}{2\sigma^2}\ [\sum_{i=1}^{p}\ \sum_{j=1}^{p} t_{ij}(\phi)y_i y_j +$$

$$S(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p \mid \varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_p=0)]$$

وتفاضل $\mid T(\phi)\mid^{\frac{1}{2}}$ بالنسبة للمعالم $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p$ صعب للغاية ولكن تأثير هذه الكمية يقل بزيادة طول السلسلة – أنظر(1976) Box – Jenkins – ومن ثم يمكن إهمالها في حالة السلاسل الطويلة. ولذلك فإنه يمكن إيجاد تقديرات الإمكان الأكبر غير الـشرطية بشكل تقريبي بإيجاد التقديرات التي تجعل الدالة الآتية أصغر ما يمكن

$$S(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p) = \sum_{i=1}^{p}\ \sum_{j=1}^{p} t_{ij}(\phi)y_i y_j + S(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p \mid \varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_p=0)$$

(4.2.18)

وبالطبع لا يوجد صور لهذه التقديرات بدلالة بيانات السلسلة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ مباشرة ويجب استخدام الطرق العددية لإيجاد مثل هذه التقديرات، وتعرف هذه التقديرات أيضًا بتقديرات المربعات الصغرى غير الشرطية أو المضبوطة exact.

تقدير تباين الاضطرابات الهادئة

عادة ما يكون تباين الاضطرابات الهادئة σ^2 غير معروف، وفي هذه الحالة يمكن اعتباره بمثابة معلمة إضافية في دالة الإمكان الشرطية (4.2.16) ودالة الإمكان غير الشرطية (4.2.17) فإذا أردنا إيجاد تقدير الإمكان الأكبر الشرطي للمعلمة σ^2 فيمكن تعظيم الدالة (4.2.16) ، وبسهولة يمكن إثبات أن هذه التقدير هو

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n-p}\sum_{t=p+1}^{n}[y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1} - \hat{\phi}_2 y_{t-2} - \cdots - \hat{\phi}_p y_{t-p}]^2$$

حيث تمثل $\hat{\phi}_1, \cdots, \hat{\phi}_p$ تقديرات المربعات الصغرى (الإمكان الأكبر) الشرطية والمحسوبة من (4.2.14). كما يمكن إيجاد تقدير الإمكان الأكبر غير الشرطي للمعلمة σ^2 بتعظيم الدالة(4.2.17) ، وبسهولة يمكن إثبات أن هذا التقدير هو (بإهمال $\left(\ln|T(\phi)|\right.$.

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n} S(\hat{\phi}_1, \cdots, \hat{\phi}_p)$$

حيث تمثل $\hat{\phi}_1, \cdots, \hat{\phi}_p$ في هذه الحالة تقديرات الإمكان الأكبر غير الشرطية المحسوبة من النهاية الصغرى للدالة (4.2.18).

التقديران $\hat{\sigma}_c^2$ و $\hat{\sigma}_u^2$ متحيزان للمعلمة σ^2، ولكن يمكن إيجاد تقدير غير متحيز تقريبي على نمط الانحدار العام التقليدي كالأتي:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2p} S(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \cdots, \hat{\phi}_p \mid \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_p = 0)$$

$$= \frac{1}{n-2p} \sum_{t=p+1}^{n} [y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1} - \cdots - \hat{\phi}_p y_{t-p}]^2$$

حيث تمثل $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \cdots, \hat{\phi}_p$ تقديرات المربعات الصغرى الشرطية للمعالم $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p$. لمزيد من التفاصيل أنظر على سبيل المثال Scheffe (1959)

4.2.3 تقدير معلمة نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى

بافتراض انعكاس النموذج MA(1) وبافتراض أن لدينا السلسلة الزمنية المرصودة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ يمكن كتابة هذا النموذج على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \quad ; \; t = 1, 2, \cdots, n \quad ; \; |\theta| < 1 \qquad (4.2.19)$$

والمشكلة التي نحن بصددها الآن هو كيفية تقدير المعلمة θ باستخدام سلسلة البيانات المتاحة $y_1, y_2, \ldots, y_n$. وقد أوضحنا في الباب السابق أن طبيعة هذا النموذج أصعب كثيراً من طبيعة النموذج AR(1) أو النماذج AR(P) بصفة عامة. والمشكلة الأولى التي تواجهنا عند تقدير المعلمة لهذا النموذج هي صعوبة إيجاد صورة تحليلية لدالة الإمكان بدلالة معلمة النموذج مباشرة، ويستدعي هذا ضرورة توافر آلية خاصة لإجراء الحسابات الضرورية الخاصة بعملية التقدير. والمشكلة الثانية التي تواجهنا هي وجود القيمة الابتدائية ε_0، وقد يستلزم هذا وضع بعض الفروض حول هذه القيمة والتي من شأنها تبسيط عملية التقدير. والمشكلة الأخيرة والأهم أن هذا النموذج غير خطي بدرجة كبيرة في المعلمة θ لأن المتغير غير المرئي ε_{t-1} هو دالة في المعلمة θ – ولذلك قد يفضل أحياناً كتابته على الصورة $\varepsilon_{t-1}(\theta)$ – ومن ثم لا يمكن تطبيق القواعد والأحكام المتعارف عليها في مجال الانحدار الخطي، ويستدعي هذا ضرورة تطبيق بعض طرق التقدير المعروفة في مجال الانحدار غير الخطي.

وقد قدم بوكس وجينكنز في عام 1970 آلية بسيطة لحل المشكلتين الأولى والثانية وذلك بوضع القيمة الابتدائية ε_0 مساوية للصفر أي مساوية للتوقع غير الشرطي للمتغير العشوائي ε_0 ثم حساب البواقي $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ عند قيمة معينة للمعلمة θ بشكل متتالي

من (4.2.19)كما يلي

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= y_1 + \theta(0) \\ \varepsilon_2 &= y_2 + \theta(\varepsilon_1) \\ &\vdots \\ \varepsilon_n &= y_n + \theta(\varepsilon_{n-1}) \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.20)$$

وتنفيذ هذه الآلية يبدأ بحساب ε_1 من المعادلة الأولى في (4.2.20) ثم استخدام هذه القيمة في حساب ε_2 من المعادلة الثانية...وهكذا حتى حساب القيمة ε_n. ويعتبر هذا الأسلوب تقريبي لأننا نفترض أن المتغير العشوائي ε_0 يساوي قيمة ثابتة هي الصفر، ومن ثم فإن أي أسلوب لتقدير المعلمة θ بافتراض صحة هذا الفرض يعتبر أسلوب شرطي، ويتضاءل تأثير هذا الفرض على حسابات دالة الإمكان بزيادة طول السلسلة n للنماذج المنعكسة.

والسؤال الذي يثار الآن وله صلة مباشرة بالمشكلة الثالثة والهامة هو: كيف يمكن تقديرمعلمة هذا النموذج غير الخطي؟. في الحقيقة هناك العديد من الطرق لتقدير معلمة نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى بعضها سهل وفي متناول مقدرة الطالب أو القارئ المستهدف وسندرسها بالتفصيل والبعض الآخر قد يحتاج إلى مستوى من الرياضيات أعلى من مقدرة القارئ المستهدف وسنشير إلى هذه الطرق بدون تفصيل.

تقدير العزوم

تعتمد هذه الطريقة على مساواة معامــل الارتبــاط النظــري $\rho(1)$ للعمليــة العشوائية $\{y_t\}$ بمعامل الارتباط المحسوب من العينة $r(1)$ والذي ســبق أن درســنا كيفية حسابه في الباب الثاني. وقد وجدنا في الباب السابق أن

$$\rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية في θ حلها على الصورة

$$\theta = -\frac{1}{2\rho(1)} \pm \left[\frac{1}{4\rho^2(1)} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

ومن ثم فإن تقدير العزوم للمعلمة θ يكون

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{2r(1)} \pm \left[\frac{1}{4r^2(1)} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

ويعني هذا وجود تقديران للمعلمة θ، أحدهما فقط يحقق شرط الانعكاس ولــيكن $\hat{\theta}_0$ والذي سنختاره ليكون تقدير العزوم. وتتميز طريقة العزوم بالبساطة والسهولة، إلا أن المقدار $\hat{\theta}_0$ ليس لديه الكفاءة المطلوبة خاصة عندما يكون جــذر المعادلــة المميــزة $\theta(B) = 0$ قريباً من دائرة الوحدة.

ويمكن تطوير مقدر العزوم لنحصل على تقدير أكثر كفــاءة بــإجراء الخطــوات التالية:

1. نحسب البواقي $\hat{\varepsilon}_1(\hat{\theta}_0), \hat{\varepsilon}_2(\hat{\theta}_0), \ldots, \hat{\varepsilon}_n(\hat{\theta}_0)$ المناظرة للتقدير المبدئي $(\hat{\theta}_0)$ من العلاقة التتابعية (4.2.20) ثم نجري الانحدار الخطي للمتغيــر y_t علــى المتغير $\hat{\varepsilon}_{t-1}(\hat{\theta}_0)$ ونحصل على تقدير آخر للمعلمة θ وليكن $\hat{\theta}_1$، كما نحصل على بواقي جديدة ولتكن $\hat{\varepsilon}_1(\hat{\theta}_1), \hat{\varepsilon}_2(\hat{\theta}_1), \ldots, \hat{\varepsilon}_n(\hat{\theta}_1)$ ومجمــوع مربعــات أخطاء مناظر وليكن $S(\hat{\theta}_1)$.

2. نجري الانحدار الخطي للمتغير y_t على البواقي الجديدة $\hat{\varepsilon}_{t-1}(\hat{\theta}_1)$ ونحصل على تقدير آخر للمعلمة θ وليكن $\hat{\theta}_2$ وبواقي جديدة ولتكن $\hat{\varepsilon}_1(\hat{\theta}_2),\ldots,\hat{\varepsilon}_n(\hat{\theta}_2)$ ومجموع مربعات مناظر وليكن $S(\hat{\theta}_2)$.

3. نكرر العملية السابقة ونحصل في الخطوة رقم (i) على التقدير $\hat{\theta}_i$ والبواقي $\hat{\varepsilon}_1(\hat{\theta}_i),\ldots,\hat{\varepsilon}_n(\hat{\theta}_i)$ومجموع المربعات $S(\hat{\theta}_i)$.

4. نستمر في إجراء هذه العملية حتى نحصل على التقارب المطلوب. وقد يأخذ الفرق بين تقدير المعلمة عند الخطوة رقم (i) والتقدير عند الخطوة رقم (i-1) كمعيار للتقارب وإنهاء العملية، ومن ثم نوقف هذه العملية إذا كان $|\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_{i-1}| < \delta$ حيث يعبر الثابت δ عن مستوى الدقة المطلوب. وقد يأخذ الفرق بين مجموع مربعات الأخطاء عند الخطوة رقم (i) ومجموع المربعات الأخطاء عند الخطوة رقم (i-1) كمعيار للتقارب، ومن ثم نوقف هذه العملية إذا كان $|S(\hat{\theta}_i) - S(\hat{\theta}_{i-1})| < \beta$ حيث يمثل β مستوى الدقة المطلوب. وبالطبع ممكن استخدام أي معيار آخر لإنهاء العملية.

تقدير الإمكان الأكبر (والمربعات الصغرى) الشرطي

بافتراض أن $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغيرات $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ تكون

$$f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{-n}{2}}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2)$$

وبسهولة يمكن إثبات أن دالة كثافة الاحتمال للمتغيرات $y_1,y_2,\ldots,y_n$ أو دالة الإمكان الشرطية بمعلومية أن $\varepsilon_0 = 0$ هي

$$L(\theta,\sigma^2 \mid y) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} (\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}[y_t + \theta\varepsilon_{t-1}(\theta)]^2)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln L(\theta,\sigma^2 \mid y) \propto -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{S_c(\theta)}{2\sigma^2}$$

حيث

$$S_c(\theta) = \sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{n}[y_t + \theta\varepsilon_{t-1}(\theta)]^2 \qquad ; \ \varepsilon_0 = 0$$

قيمة θ التي تجعل دالة الإمكان نهاية عظمى هي قيمة θ التي تجعل الدالـــة $S_C(\theta)$ نهاية صغرى، ومن ثم فإن تقدير الإمكان الشرطي للمعلمة θ يعادل تقدير المربعـــات الصغرى لنفس المعلمة. وقد سبق أن أثبتنا في الباب السابق أن

$$\varepsilon_t(\theta) = y_t + \theta y_{t-1} + \theta^2 y_{t-2} + \cdots + \theta^{t-1} y_1 + \theta^t \varepsilon_0$$

وحيث أن النموذج منعكس فإن تأثير ε_0 يتضاءل في حساب المقدار $S_C(\theta)$ بزيـــادة طول السلسلة ومن ثم يمكن كتابة الدالة $S_C(\theta)$ تقريبًـــا – بوضـــع $\varepsilon_0 = 0$ – علـــى الصورة

$$S_C(\theta) = \sum_{t=1}^{n} [y_t + \theta y_{t-1} + \theta^2 y_{t-2} + \cdots + \theta^{t-1} y_1]^2$$

تفاضل الدالة $S_C(\theta)$ بالنسبة للمعلمة يعطي كثيرة حدود في θ من درجة أعلى كثيرًا من الدرجة الخطية لا يمكن حلها بطرق الانحدار الخطي التقليدية وإنما يجب استخدام بعض الطرق المستخدمة في مجال الانحدار غير الخطي. إحدى الطرق الشهيرة التي تستخدم لإيجاد النهاية الصغرى للدالة $S_C(\theta)$ ما يعرف بطريقة البحث الشبكي grid search. ويمكن تلخيص خطوات البحث الشبكي كالتالي:

1. نحدد قيمًا تقريبية للمعلمة θ في فراغ المعلمة $(-1<\theta<1)$ حسب مستوى الدقة المطلوب. فإذا كان مستوى الدقة المطلوب 0.1 فيمكن تحديد القيم الآتية

$$\theta: \quad -0.9 \quad -0.8 \ldots \quad 0.0 \quad 0.1 \quad 0.2 \ldots \quad 0.8 \quad 0.9$$

2. لكل قيمة محددة للمعلمة θ نحسب البواقي التي تناظر هذه القيمة ولتكن $\varepsilon_1(\theta),\varepsilon_2(\theta),\ldots,\varepsilon_n(\theta)$ ثم نحسب مجموع مربعات الأخطاء $S_C(\theta)$ المناظر لهذه القيمة. ومن ثم ينشأ لدينا مجاميع مربعات الأخطاء الآتية

$$S_C(\theta): \; S_C(-0.9) \quad S_C(-0.8)\ldots \quad S_C(0) \quad S_C(0.1) \quad S_C(0.2)\ldots \quad S_C(0.8) \quad S_C(0.9)$$

3. نبحث عن أصغر قيمة من قيم مجاميع مربعات الأخطاء $S_C(\theta)$ وبالتالي تكون قيمة θ المناظرة هي تقدير الإمكان الأكبر وتقدير المربعات الصغرى غير الخطي في نفس الوقت.

وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن الحصول على مستوى دقة أكبر إذا تم تحديد القيم التقريبية للمعلمة θ في فراغ المعلمة بحيث يكون الفرق بينها أقل من 0.1 فإذا كان مستوى الدقة المطلوب هو 0.01 مثلاً فيمكن تحديد القيم الآتية:

$$\theta: \quad -0.99 \quad -0.98 \ldots \quad 0.0 \quad 0.01 \quad 0.02 \ldots \quad 0.98 \quad 0.99$$

ولا يخفى على القارئ أن عدد الحسابات يزيد بزيادة مستوى الدقة بشكل يستدعي معه استخدام الكمبيوتر خاصة في حالة النماذج ذات الرتب الأعلى. ويتميز هذا الأسلوب بالدقة حيث يمثل التقدير $\hat{\theta}$ الذى نحصل عليه نقطة نهاية صغرى مطلقة global للدالة $S_C(\theta)$ (أو نقطة نهاية عظمى لدالة الإمكان)، ويعاب عليه أنه يحتاج حسابات كثيرة خاصة في حالة النماذج ذات الرتب الأعلى.

هناك بعض الطرق الأخرى الأكثر كفاءة عدديًا لإيجاد مقدر المربعات الصغرى غير الخطي للمعلمة θ مثل طريقة جاوس – نيوتن والتي تعتمد على ما يعرف

بالتقريب الخطي للنموذج أو تقريب الدالة $S_C(\theta)$ بواسطة معادلة من الدرجة الثانية. ولكن يعاب على هذه الطريقة أنها قد لا تعطي في النهاية نقطة النهاية الصغرى المطلقة وذلك لأن الدالة $S_C(\theta)$ لها أكثر من نهاية صغرى. وللمزيد من التفاصيل حول هذه الطريقة يمكن للقارئ الرجوع إلى Nelson (1973) أو Harvey (1981) .

مثال (7):

إذا كانت السلسلة $\{y_t\}$ تتبع نموذج MA(1)، أوجد تقدير العزوم لمعلمة النموذج باستخدام البيانات الآتية :

y_t : 20 30 15 20 20

الحل:

$$r(1) = -0.47$$

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{2(-0.47)} \pm \left[\frac{1}{4(-0.47)} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{\theta}_1 = 1.427 \quad ; \quad \hat{\theta}_2 = 0.701$$

ومن ثم فإن تقدير العزوم للمعلمة θ هو $\hat{\theta} = 0.701$

مثال(8):

إذا كانت $\{y_t\}$ عملية عشوائية تتبع نظام MA(1) بمعلمة θ أوجد $S_C(0.5)$، $S_C(-0.5)$ باستخدام القيم الافتراضية الآتية:

y_t : -1 1 2 -1 -1

الحل:

$$\varepsilon_t = y_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

إذا كانت $\theta = 0.5$

$$\varepsilon_t = y_t + 0.5\,\varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_1 = -1 + 0.5\,(0) = -1$$

$$\varepsilon_2 = 1 + 0.5\,(-1) = 0.5$$

$$\varepsilon_3 = 2 + 0.5\,(0.5) = 2.25$$

$$\varepsilon_4 = -1 + 0.5\,(2.25) = 0.125$$

$$\varepsilon_5 = -1 + 0.5\,(0.125) = -0.9375$$

$$S_C\,(0.5) = (-1)^2 + (0.5)^2 + (2.25)^2 + (0.125)^2 + (-0.9375)^2 = 7.21$$

إذا كانت $\theta = -0.5$

$$\varepsilon_t = y_t - 0.5\,\varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_1 = -1 - 0.5\,(0) = -1$$

$$\varepsilon_2 = 1 - 0.5\,(-1) = 1.5$$

$$\varepsilon_3 = 2 - 0.5\,(1.5) = 1.25$$

$$\varepsilon_4 = -1 - 0.5\,(1.25) = -1.625$$

$$\varepsilon_5 = -1 - 0.5\,(-1.625) = -0.1875$$

$$S_C\,(-0.5) = (-1)^2 + (1.5)^2 + (1.25)^2 + (-1.625)^2 + (-0.1875)^2 = 7.49$$

ويعني هذا أن مجموع مربعات البواقي المناظر للقيمة $\theta = 0.5$ أصغر من مجموع مربعات البواقي المناظر للقيمة $\theta = -0.5$

مثال(9):

إذا كانت $\{y_t\}$ عملية عشوائية تتبع نظام MA(1) بمعلمة θ. استخدم طريقة البحث الشبكي في إيجاد تقدير المربعات الصغرى غير الخطي للمعلمة θ باستخدام القيم الآتية:

y_t: 0.65 2.75 1.22 1.97 3.1 1.35 2.85 0.75 3.05 1.43

الحل:

θ	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.0
$S_C(\theta)$	43.06	40.8	37.76	35.22	33.7	33.34	34.18	36.25	39.7	44.82
θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
$S_C(\theta)$	52.11	62.44	77.26	99.11	132.52	186.05	276.58	439.14	749.6	

ومن ثم فإن $\theta = -0.4$ نقطة نهاية صغرى مطلقة للدالة $S_C(\theta)$ وتمثل تقدير المربعات الصغرى غير الخطي للمعلمة θ تقريبًا

أيضًا تقدير الإمكان الأكبر للمعلمة σ^2 هو

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{S_c(-0.4)}{10} = \frac{33.34}{10} = 3.334$$

وقبل أن نختتم الحديث عن تقدير معلمة نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى قد يكون من المفيد أن نلفت انتباه القارئ إلى أن اشتقاق تقدير الإمكان غير الشرطي لمعلمة النموذج أصعب كثيرًا من تقدير الإمكان الشرطي ويحتاج إلى مستوى من الرياضيات أعلى من المستوى المستهدف، ولذلك فلن نتعرض هنا لإيجاد

هذا التقدير وسنكتفي فقط بالتنويه إلى أن بوكس وجينكنز قدما صورة لدالة الإمكان غير الشرطية لهذا النموذج، وقد أوضحنا أن التقديرات التي نحصل عليها بالطرق المختلفة لا تختلف كثيرًا في حالة العينات المعقولة أو الكبيرة. للمزيد من التفاصيل والدراسة يمكن للقارئ الرجوع إلى Box – Jenkins(1976)

4.2.4 تقدير معالم نماذج المتوسطات المتحركة العامة

بافتراض انعكاس هذه النماذج وبافتراض أن لدينا السلسلة الزمنية المرصودة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ فإنه يمكن كتابة هذه النماذج على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad ; t = 1,2,\ldots,n \qquad (4.2.21)$$

حيث تقع كل جذور المعادلة المميزة $\theta(B) = 0$ خارج دائرة الوحدة.

يمكن التعبير عن ε_t من المعادلة (4.2.21) في الصورة

$$\varepsilon_t = \varepsilon_t(\theta_1, \ldots, \theta_q) = y_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad (4.2.22)$$

مرة أخرى نذكر بأن هذا النموذج غير خطي في المعالم $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ لأن الاضطرابات $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-q}$ كلها تعتمد على المعالم ولذلك تكتب أحيانًا على الصورة $\varepsilon_{t-1}(\theta), \varepsilon_{t-2}(\theta), \ldots, \varepsilon_{t-q}(\theta)$ حيث $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q)'$. وفي حالات النماذج العامة من الرتبة q نجد أن لدينا عدد q من القيم الابتدائية هي $\varepsilon_{1-q}, \varepsilon_{2-q}, \ldots, \varepsilon_0$. وتتلخص مشكلة التقدير الشرطي في إيجاد تقديرات المعالم $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ التي تجعل مجموع مربعات الأخطاء

$$S_c(\theta) = \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2(\theta) = \sum_{t=1}^{n} [y_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}(\theta) + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}(\theta)]^2$$

أصغر ما يمكن بشرط أن

$$\varepsilon_{1-q} = \varepsilon_{2-q} = \ldots = \varepsilon_0 = 0$$

وإيجاد النهاية الصغرى للدالة $S_c(\theta)$ يعادل إيجاد النهاية العظمى لدالة الإمكان الشرطية. ويلاحظ أن الدالة $S_c(\theta)$ ليست من الدرجة الثانية في المعالم $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ نظرًا لأن الاضطرابات $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-q}$ تعتمد على المعالم، ومن ثم لا يمكن إيجاد التقديرات الشرطية للمعالم بدلالة بيانات السلسلة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ مباشرة باستخدام أسلوب التفاضل. وبالطبع يمكن استخدام أسلوب البحث الشبكي على فراغ المعالم الذي يحقق شروط الانعكاس التى سبق دراستها في الباب السابق. فعلى سبيل المثال إذا كانت رتبة النموذج تساوي 2 يمكن البحث في المنطقة المثلثية التي سبق ذكرها في الباب السابق عن القيمة $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ التي تحقق النهاية الصغرى المطلقة للدالة $S_c(\theta)$.

بالطبع يمكن استخدام أسلوب جاوس ونيوتن أو أي أسلوب معدل له أو أي أسلوب عددي آخر. فقد نحسب تقديرين مبدئيين للمعلمتين θ_1, θ_2 بطريقة العزوم ثم نحسب البواقي $\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \ldots, \hat{\varepsilon}_n$ من العلاقة التتابعية (4.2.22) بافتراض أن $\varepsilon_{-1} = \varepsilon_0 = 0$ ثم نقوم بإجراء الانحدار $y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} - \theta_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}$ ونحصل على تقديرين جديدين للمعلمتين θ_1, θ_2 نستخدمهما في الحصول على فئة جديدة من البواقي، ونكرر هذه العملية حتى نحصل على التقارب المطلوب.

4.2.5 تقدير معلمتي النموذج ARMA(1,1)

بافتراض سكون وانعكاس النموذج ARMA(1,1) وبافتراض أن لدينا السلسلة المرصودة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ يمكن كتابة هذا النموذج على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi\, y_{t-1} - \theta\, \varepsilon_{t-1} \quad ; t = 1, 2, \ldots, n \quad ; |\phi| < 1 \quad ; |\theta| < 1 \tag{4.2.23}$$

ومن ثم يمكن كتابة ε_t على الصورة

$$\varepsilon_t = y_t - \phi\, y_{t-1} + \theta\, \varepsilon_{t-1} \tag{4.2.24}$$

والمشاكل التي تواجهنا هنا في تقدير المعلمتين ϕ,θ قريبة الشبة من مشاكل تقدير معالم نماذج المتوسطات المتحركة. المشكلة الأولى هي صعوبة إيجاد صورة تحليلية لدالة الإمكان بدلالة معلمتي النموذج مباشرة، والمشكلة الثانية هي وجود قيمتان ابتدائيتان هما y_0, ε_0، والمشكلة الثالثة هي عدم خطية هذا النموذج. ويمكن حل المشكلتين الأولى والثانية وذلك بوضع $\varepsilon_0 = 0$ وبدء حساب البواقي من t=2 بدلاً من t=1، ثم حساب البواقي $\varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n$ بشكل تتابعي من الصيغة (4.2.24). والتقديرات التي تعتمد على هذا الحل تعتبر تقديرات شرطية إي بافتراض أن $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0$. ويتضاءل تأثير هذا الفرض على حسابات دالة الإمكان بزيادة طول السلسلة.

وبافتراض أن $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس فإن يمكن إثبات أن دالة الإمكان المشروطة تأخذ الصورة.

$$L(\phi,\theta,\sigma^2 \mid y) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}[y_t - \phi y_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-1}(\phi,\theta)]^2\right)$$

ومن ثم فإن قيمة (ϕ,θ) التي تجعل دالة الإمكان نهاية عظمى هي قيمة (ϕ,θ) التي تجعل الدالة $S_c(\phi,\theta)$ نهاية صغرى حيث

$$S_c(\phi,\theta) = \sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^{n}[y_t - \phi y_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-1}(\phi,\theta)]^2$$

والدالة $S_c(\phi,\theta)$ ليست دالة من الدرجة الثانية في المعلمتين ϕ,θ، وذلك لأن ε_{t-1} دالة في ϕ,θ ومن ثم يمكن استخدام أسلوب البحث الشبكي لإيجاد النهاية الصغرى لمجموع مربعات البواقي على فراغ المعالم $-1<\theta<1 \quad ; \quad -1<\phi<1$. ويلاحظ هنا أن تطبيق أسلوب البحث الشبكي يتطلب حسابات أكثر كثيرًا من حالة نموذج MA(1) لأنه إذا ارتضينا مثلاً تحديد قيم ϕ,θ بحيث يكون الفرق بين القيم المتتالية 0.1 فإن هذا يعني أنه يجب حساب 361 قيمة للدالة $S_c(\phi,\theta)$، أما إذا كان الفرق بين

القيم المتتالية 0.01 فإنه يجب حساب 39601 قيمة للدالة واختيار القيمة التي تجعل الدالة نهاية صغرى. مرة أخرى نذكر أن هذا التقدير يسمي بتقدير المربعات الصغرى غير الخطي أو تقدير الإمكان الأكبر الشرطي . وبصفة عامة يكون هذا التقدير تقريب جيد للتقدير غير الشرطي إذا كان حجم العينة كبيرًا.

4.2.6 تقدير نماذج ARMA (p, q) العامة

بافتراض سكون وانعكاس النماذج ARMA(p, q) وبافتراض أن لدينا السلسلة المرصودة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ يمكن كتابة هذه النماذج على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad ; t = 1,2,\ldots,n \tag{4.2.25}$$

حيث تقع جذور كل من المعادلتين $\theta(B) = 0 \;\; ; \;\; \phi(B) = 0$ خارج دائرة الوحدة ومن ثم يمكن حساب ε_t من (4.2.25) كما يلي

$$\varepsilon_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{4.2.26}$$

ولدينا هنا مجموعتان من القيم الابتدائية. المجموعة الأولى وهي خاصة بقيم y_t وتتكون من القيم الابتدائية $y_0, y_1, \ldots, y_{1-p}$ كما في حالة النماذج AR(p) . وللتغلب على هذه المشكلة نبدأ حساب ε_t من t=p+1 وليس من t=1، وهذا يعادل الشروط الآتية:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_p = 0 \tag{4.2.27}$$

ومن ثم فإن أول قيمة محسوبة للبواقي ε_t هي ε_{p+1} وتأخذ الشكل الآتي من (4.2.26)

$$\varepsilon_{p+1} = y_{p+1} - \phi_1 \, y_p - \cdots - \phi_p \, y_1 + \theta_1 \, \varepsilon_p + \cdots + \theta_q \, \varepsilon_{p+1-q}$$

ولحساب ε_{p+1} من هذه الصيغة نجد أننا نواجه المجموعة الثانية من القيم الابتدائية وهي خاصة بقيم ε_t مباشرة وتتكون من القيم الابتدائية $\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \ldots, \varepsilon_{p+1-q}$. وللتغلب على هذه المشكلة نفترض أن

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \ldots = \varepsilon_{p+1-q} = 0 \qquad (4.2.28)$$

ويمكن عادة التعبير عن الشروط التي جاءت في (4.2.27) و(4.2.28) بالشروط الآتية:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p-1} = \cdots = \varepsilon_1 = \varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \cdots = \varepsilon_{p+1-q} = 0 \qquad (4.2.29)$$

ومن ثم يمكن حساب $\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_n$ تتابعيًا من الصيغة (4.2.26) بافتراض صحة الشروط (4.2.29)، وبذلك يتم حل مشكلتي القيم الابتدائية وحساب دالة الإمكان الشرطية.

بافتراض أن $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس فإنه يمكن إثبات أن دالة الإمكان المشروطة بالقيود (4.2.29) يمكن أن تأخذ الصورة الآتية:

$$L(\phi, \theta, \sigma^2 \mid y) = (2\pi)^{-\frac{(n-p)}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{(n-p)}{2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^{n} [y_t -$$

$$\phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}]^2)$$

حيث

$$\phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \cdots \phi_p]' \qquad ; \theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \cdots \theta_p]'$$

ومن ثم فإن قيمة (ϕ,θ) التي تجعل دالة الإمكان الشرطية نهاية عظمى هي نفس القيمة التي تجعل الدالة $S_c(\phi,\theta)$ نهاية صغرى حيث

$$S_c(\phi,\theta) = \sum_{t=p+1}^{n}\varepsilon_t^2 = \sum_{t=p+1}^{n}[y_t - \phi' y(t) + \theta' \varepsilon(t)]'$$

حيث

$$y(t) = [y_{t-1} \quad y_{t-2} \cdots y_{t-p}]'$$

$$\varepsilon(t) = [\varepsilon_{t-1} \quad \varepsilon_{t-2} \cdots \varepsilon_{t-q}]'$$

والدالة $S_c(\phi,\theta)$ ليست دالة من الدرجة الثانية في المعالم ϕ,θ وذلك لأن عناصر المتجه $\varepsilon(t)$ تعتمد على هذه المعالم وأحيانًا يشار إليه بالرمز $\varepsilon(t,\phi,\theta)$ لتأكيد هذه الجزئية. بعد ذلك يمكن استخدام أسلوب البحث الشبكي أو أسلوب جاوس ونيوتن أو أي أسلوب عددي آخر لإيجاد النهاية الصغرى للدالة $S_c(\phi,\theta)$ وبالتالي إيجاد النهاية العظمى لدالة الإمكان الشرطي . ويتوقف الأسلوب المستخدم على عدد المعالم ومستوى الدقة المطلوب.

4.2.7 خصائص مقدرات الإمكان التقاربية

ذكرنا سابقًا أنه يوجد اختلافات ضئيلة – في حالة السلاسل الطويلة أو معقولة الطول– بين التقديرات التي نحصل عليها من الطرق المختلفة خاصة طريقة الإمكان الأكبر الشرطية وطريقة المربعات الصغرى الشرطية وطريقة الإمكان الأكبر غير الشرطية وطريقة المربعات الصغرى غير الشرطية. وقد يكون من المفيد أن نلفت نظر القارئ إلى الدراسة العملية التي أجريت بواسطة(1962).Barnard et. al والتي توضح أن طول السلسلة العملي الذي يجعل هذه الاختلافات ضئيلة جدًا هو 75 مشاهدة. وبذلك عندما نتحدث عن خصائص مقدرات الإمكان التقاربية فإننا في الواقع

نتحدث عن تقديرات الإمكان الشرطية وغير الشرطية وكـذلك تقـديرات المربعـات الصغرى الشرطية وغير الشرطية إذا كان طول السلسلة أكبر من 75 مشاهدة

وكما نعلم من دراستنا في نظرية الإحصاء أن مقدرات الإمكان الأكبر غيـر متحيزة وتتبع توزيع معتاد مشترك تقاربيًا إذا توافرت بعض الشروط يطلـق عليهـا بالشروط المنتظمة regular conditions. أما بالنسبة لتباينـات وتغـايرات مقـدرات المعالم فنقدم هنا بعض الصيغ لبعض العمليات الخاصة بدون برهان

عمليات AR(1)

$$Var(\hat{\phi}) \approx \frac{1-\phi^2}{n}$$

عمليات AR(2)

$$Var(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \approx \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1-\phi_2^2 & -\phi_1(1+\phi_2) \\ -\phi_1(1+\phi_2) & 1-\phi_2^2 \end{bmatrix}$$

عمليات MA(1)

$$Var(\hat{\theta}) \approx \frac{1-\theta^2}{n}$$

عمليات MA(2)

$$Var(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \approx \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1-\theta_2^2 & -\theta_1(1+\theta_2) \\ -\theta_1(1+\theta_2) & 1-\theta_2^2 \end{bmatrix}$$

عمليات ARMA (1,1)

$$Var(\hat{\phi}, \hat{\theta}) \approx \frac{(1-\phi\theta)}{n(\phi-\theta)^2}\begin{bmatrix} (1-\phi^2)(1-\phi\theta) & (1-\phi^2)(1-\theta^2) \\ (1-\phi^2)(1-\theta^2) & (1-\theta^2)(1-\phi\theta) \end{bmatrix}$$

ويلاحظ في هذه الصيغ أن تباينات وتغايرات مقدرات معـالم نمـوذج المتوسـطات المتحركة تشبه تباينات مقدرات معالم نموذج الانحدار الذاتي إذا كان النموذجان لهمـا

نفس الرتبة كما يلاحظ أن تباينات وتغايرات مقدرات الإمكان الأكبر دوال في المعالم الأصلية المجهولة، ومن ثم يمكن تقدير هذه الكميات باستبدال المعالم بواسطة تقديرات الإمكان الأكبر لها.

وتمكننا المعلومات السابقة من القيام باستدلالات إحصائية حول معالم العملية موضع الدراسة فيمكن اختبار الفروض الإحصائية المختلفة وإنشاء فترات الثقة ذات الصلة. فعلى سبيل المثال إذا أردنا اختبار الفرض الإحصائي $H_0 : \theta_2 = \theta_0$ ضد الفرض البديل $H_1 : \theta_2 \neq \theta_0$ نستخدم الإحصاء

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_2 - \theta_0)}{\sqrt{1-\hat{\theta}_2^2}}$$

والذي يتبع تقاربيًا توزيع معتاد قياسي بافتراض صحة فرض العدم H_0، ومن ثم نرفض H_0 إذا كان

$$|Z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$$

حيث تعرف القيمة $z_{\frac{\alpha}{2}}$ بأنها القيمة التي تحصر على يمينها مساحة قدرها $\frac{\alpha}{2}$ ، أي أن

$$P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

وعادة ما يكون الفرض $H_0 : \theta_2 = 0$ ضد الفرض $H_1 : \theta_2 \neq 0$ ذو اهتمام خاص حيث يختبر معنوية θ_2 أو إمكانية استخدام النموذج MA(1) كبديل ملائم للنموذج MA(2) . وسنرى في المبحث التالي أن هذا الفرض يلعب دورًا هامًا في تشخيص النموذج. وبالمثل يمكن إنشاء فترة ثقة للمعلمة θ_2 كما يلي:

$$\hat{\theta}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1-\hat{\theta}_2^2}{n}}$$

مثال (10):

في توفيق نموذج AR(2) لسلسلة زمنية مكونة من 100 مشاهدة كـــان تقـــدير الإمكان الأكبر للمعلمة ϕ_2=0.2. اختبر معنوية ϕ_2 ثم كون 95% فتـــرة ثقـــة لهـــذه المعلمة

الحـــــــل:

$$Var(\hat{\phi}_2) = \frac{1}{100}(1-0.04) = 0.0096$$

$$\text{SE}(\hat{\phi}_2) = 0.098$$

$$Z = \frac{0.2}{0.098} = 2.04$$

باستخدام مستوى المعنوية 5% نرفض فرض العدم القائل بعدم معنوية المعلمة ϕ_2.

فترة الثقة

$$0.2 \pm 2(0.98) = (0.004, 0.396)$$

4.3 التشخيص Diagnostic Checking

يعتمد نموذج السلاسل الزمنية الذي يتم التعرف عليه في المرحلة الأولى على مجموعة هامة من الفروض النظرية الخاصة بالعملية العشوائية التي ولدت البيانـــات والشكل العام للنموذج والتغيرات العشوائية ε_t. ويعنـــي هـــذا أن مقـــدرات المعـــالم وخصائصها الإحصائية والاستدلالات الإحصائية المختلفة ليس لها معنى إلا إذا كانت هذه الفروض صحيحة أو على الأقل لا يمكن رفض ملاءمتها للبيانات المتاحة. ومـــن ثم فإن دراسة ملاءمة هذه الفروض للسلسلة الزمنية المتاحة تعد من الأمور الضرورية وجزء لا يتجزأ من دراسة تحليل السلاسل الزمنية لأي مجموعة من البيانات والتـــي

يجب أن يوليها مستخدم السلاسل الزمنية اهتمامًا خاصًا . وتعرف هذه النوعية من الدراسة في الأعراف الإحصائية بتشخيص النموذج المبدئي والذي يمكن النظر إليه كنوع من التوازن بين الفروض النظرية التي يعتمد عليها النموذج ومخرجات العملية التطبيقية لمرحلة التقدير. والتشخيص هو المرحلة الثالثة من مراحل تطبيق منهجية بوكس وجينكنز، فبعد التعرف على النموذج المبدئي وتقدير معالمه يجب تقويم هذا النموذج للتأكد من أن مرحلة التقدير ومخرجاتها تتوافق مع الفروض النظرية أو على الأقل لا تظهر خلل واضح في أي من هذه الفروض . وهذه المرحلة من أهم وأخطر مراحل التحليل حيث يتم فيها الاطمئنان على ملاءمة النموذج المبدئي وبالتالي إمكانية استخدامها في التنبؤ أو يتم فيها تعديل هذا النموذج وذلك بناءً على نتائج الفحوص والاختبارات التي تجرى في هذه المرحلة، وفي هذه الحالة يجب إخضاع النموذج المعدل لكافة الفحوص والاختبارات التي سنتحدث عنها هنا بالتفصيل. أي أن مرحلة التشخيص هي في جوهرها مشكلة تحسين أو تطوير النموذج المبدئي لكي يكون أكثر ملاءمة للبيانات المتاحة ، وهي مشكلة معقدة ومتعددة الأبعاد والجوانب. ومحلل السلاسل الزمنية إذ يأخذ في اعتباره كل هذه الأبعاد والجوانب يجب أن ينتهي إلى نموذج أفضل للبيانات المتاحة . ويعتمد تشخيص النموذج بصفة عامة على إجراء العديد من الفحوص والاختبارات أهمها:

1. تحليل السكون
2. تحليل الانعكاس
3. تحليل البواقي
4. توفيق النموذج الأدنى مباشرة
5. توفيق النموذج الأعلى مباشرة

ونقدم فيما يلي عرضًا مبسطًا لهذه الفحوص والاختبارات

4.3.1 تحليل السكون

أوضحنا فيما سبق أهمية السكون في تحليل السلاسل الزمنية ومن ثم يجب فحص تقديرات معالم الانحدار الذاتي التي تم الحصول عليها في مرحلة التقدير للتأكد من أنها تحقق شروط السكون وهي أن جذور المعادلة المميزة $\phi(B)=0$ تقع كلها خارج دائرة الوحدة. إذا كانت القيمة المطلقة لكل جذر من هذه الجذور أكبر من الواحد الصحيح فهذا يدل على سكون العملية العشوائية التي ولدت السلسلة المرصودة، أما إذا كانت القيمة المطلقة لأحد الجذور قريبة من الواحد الصحيح فقد يدل هذا على ضرورة أخذ فروق إضافية. إفترض على سبيل المثال أن النموذج الذي تم التعرف عليه وتقديره هو نموذج ARIMA (1,0,1) على الصورة

$$(1-\phi B)y_t = (1-\theta B)\varepsilon_t$$

فإذا كانت المعلمة ϕ لا تختلف معنويًا عن الواحد صحيح فإنه يمكن إعادة كتابة النموذج على الصورة

$$(1-B)y_t = (1-\theta B)\varepsilon_t$$

أي أن

$$z_t = (1-\theta B)\varepsilon_t$$

حيث

$$z_t = y_t - y_{t-1}$$

وهذه العملية ساكنة، ويعني هذا أن النموذج ARIMA (0,1,1) قد يكون أفضل من النموذج الأصلي ARIMA (1,0,1) في تمثيل السلسلة الزمنية y_t.

مثال (11):

بعد تقدير النموذج المبدئي ARIMA(2,0,1) لبيانات السلسلة الزمنية y_t وجد أن أحد جذري المعادلة $\phi(B)=0$ قريب من الواحد الصحيح. إقترح نموذجًا آخر قد يكون أفضل من النموذج الأصلي

الحـــــل:

النموذج الأصلي

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)y_t=(1-\theta B)\varepsilon_t$$

حيث أن أحد جذري المعادلة $1-\phi_1 B-\phi_2 B^2=0$ قريب من الواحد الصحيح فإنه يمكن إعادة كتابة النموذج الأصلي المعرف على الصورة

$$(1-B)(1-\phi B)y_t=(1-\theta B)\varepsilon_t$$

وهذا يعني أن السلسلة y_t غير ساكنة، ومن ثم فإن

$$(1-\phi B)z_t=(1-\theta B)\varepsilon_t$$

ويعني هذا أن النموذج ARIMA (1,1,1) قد يكون أفضل من النموذج ARIMA(2,0,1) للسلسلة y_t.

4.3.2 تحليل الانعكاس

أوضحنا فيما سبق أهمية فرض الانعكاس لنماذج السلاسل الزمنية موضع الدراسة، ومن ثم يجب فحص التقديرات الخاصة بمعالم المتوسطات المتحركة للتأكد من أنها تحقق شروط الانعكاس وهي أن جذور المعادلة $\theta(B)=0$ يجب أن تقع كلها خارج دائرة الوحدة، فإذا كانت القيمة المطلقة لكل جذر من هذه الجذور أكبر من الواحد الصحيح فهذا يدل على انعكاس النموذج الأصلي. أما إذا كان أحد الجذور قريب من الواحد الصحيح فقد يدل هذا على استخدام فروق غير ضرورية. فعلى سبيل المثال افترض أن النموذج الأصلي هو ARIMA(1,1,1) المعرف على الصورة

$$(1-\phi B)z_t=(1-\theta B)\varepsilon_t$$

حيث

$$z_t=y_t-y_{t-1}=(1-B)y_t \tag{4.3.1}$$

وافترض أن قيمة θ لا تختلف معنويًا عن الواحد الصحيح فهذا يعني أن

$$(1-\phi B)z_t = (1-B)\varepsilon_t$$

أي أن

$$(1-\phi B)(1-B)^{-1}z_t = \varepsilon_t \qquad (4.3.2)$$

ومن ثم فإن بالتعويض من (4.3.1) في (4.3.2)

$$(1-\phi B)y_t = \varepsilon_t$$

وهذا يعني أن النموذج ARIMA(1,0,0) قد يكون أفضل من النموذج الأصلي ARIMA(1,1,1) في تمثيل بيانات السلسلة y_t

مثال (12):

بعد تقدير النموذج المبدئي ARIMA(1,1,2) لبيانات السلسلة الزمنية y_t وجد أن أحد جذري المعادلة $\theta(B)=0$ قريب من الواحد الصحيح. اقترح نموذجًا آخر قد يكون أفضل من النموذج الأصلي

الحـــل:

النموذج الأصلي

$$(1-\phi B)z_t = (1-\theta_1 B-\theta_2 B^2)\varepsilon_t$$

حيث

$$z_t = (1-B)y_t$$

أي أن

$$y_t = (1-B)^{-1}z_t \qquad (4.3.3)$$

حيث إن أحد جذري المعادلة $1-\theta_1 B-\theta_2 B^2 = 0$ قريب من الواحد فإنه يمكن إعادة كتابة النموذج الأصلي على الصورة

$$(1-\phi B)\ z_t = (1-\ B)(1-\theta B)\,\varepsilon_t$$

ومن ثم فإن

$$(1-\phi B)(1-B)^{-1}\ z_t = (1-\theta B)\,\varepsilon_t \qquad (4.3.4)$$

وبالتعويض من (4.3.3) في (4.3.4)

$$(1-\phi B)\ y_t = (1-\theta B)\,\varepsilon_t$$

وهذا يعني أن النموذج ARIMA (1,0,1) قد يكون أفضل من النموذج الأصلي ARIMA (1,1,2) في تمثيل بيانات السلسلة y_t

4.3.3 تحليل البواقي

إذا كان النموذج المبدئي الذي تم اختياره في المرحلة الأولى يمثل بالفعل خصائص العملية العشوائية التي ولدت بيانات السلسلة التي بين أيدينا، فإن البواقي الناتجة من عملية التقدير يجب أن تحقق الفروض النظرية الموضوعة والخاصة بالتغيرات العشوائية ε_t أو على الأقل أن هذه البواقي يجب أن لا تظهر أي خلل واضح في هذه الفروض وأهمها عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء الحقيقية ε_t . والأخطاء المقدرة أو البواقي $\hat{\varepsilon}_t$ هي الفرق بين القيم المشاهدة للسلسلة التي تم تحليلها y_t والقيم المقدرة لهذه المشاهدات وهي $\hat{y}_t$ كما هو معروف. وفي الواقع أن حساب البواقي قد يكون سهلاً ومباشرًا لبعض النماذج مثل نماذج AR(p) والذي يمكن إيجاد البواقي لها بسهولة من المعادلة

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1} - \hat{\phi}_2 y_{t-2} - \cdots \hat{\phi}_p y_{t-p}$$

فالتقديرات $\hat{\phi}$ نحصل عليها من مرحلة التقدير والمتغيرات المفسرة $y_{t-1},\ldots,y_{t-p}$ هي متغيرات مشاهدة، وبالتالي يمكن إيجاد عدد (n-p) من البواقي دون وضع أي فروض على المتغيرات الابتدائية $y_{1-p}, y_{2-p},\ldots,$. أما في حالة نماذج

MA(q) أو النماذج ARMA (p,q) المختلطة فإن آلية حساب الأخطاء المقدرة تكون مختلفة ويجب وضع بعض الفروض حول المتغيرات الابتدائية وسنتحدث عن هذه الآلية والفروض بشكل أكثر تفصيلاً في المبحث الرابع، أما هنا فسنفترض أن هذه الأخطاء قد أصبحت جاهزة لدينا ويجب فحصها للتأكد من كفاءة النموذج المبدئي.

إذا افترضنا أن $\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \cdots, \hat{\varepsilon}_n$ تمثل البواقي الناتجة من توفيق النموذج المبدئي لبيانات السلسلة المتاحة وكان هذا النموذج جيدًا فإن هذه البواقي يجب أن لا تحتوي على أي أنماط أو تحركات منتظمة يمكن التنبؤ بها أي أنها يجب أن تعكس الخصائص الرئيسية للمتغيرات ε_t وهي أن متوسطها يجب أن يكون صفرًا وتشتتها يجب أن يكون ثابتًا بالإضافة إلى عدم وجود ارتباط ذاتي بين هذه المتغيرات. وفي الواقع أن التحقق من عدم الإخلال بهذه الخصائص يمكن أن يتم بالعديد من الوسائل التي تندرج تحت تحليل البواقي وأهمها رسم البواقي كسلسلة زمنية وفحص دالة الارتباط الذاتي للبواقي $\hat{\varepsilon}_t$ وإحصاء بوكس وبيرس المعدل ونمذجة الفروق الأولي للبواقي $(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})$ كما سنرى الآن.

رسم البواقي

الخطوة الأولى والهامة في تحليل البواقي هي التوقيع البياني لهذه القيم كسلسلة زمنية حيث يخصص المحور الأفقي عادة للزمن بينما يخصص المحور الرأسي للبواقي $\hat{\varepsilon}_t$. وهذا الرسم خطوة ضرورية لا يمكن الاستغناء عنها بإجراء الفحوص والاختبارات الإحصائية التي سنتحدث عنها في هذا المبحث الفرعي. فرسم البواقي يظهر الملامح الأساسية للبواقي – مثل الاتجاه العام والتشتت والبيانات الشاذة– بشكل قد لا تستطيع الاختبارات الإحصائية إظهارها واكتشافها. وإذا كان النموذج المبدئي جيدًا فهذا يعني أنه قد استطاع استيعاب كل الأنماط والتحركات المنتظمة في البيانات تاركًا البواقي خالية من مثل هذه الأنماط والتحركات، ومن ثم فإن البواقي على ورقة

التوقيع البياني يجب أن تتأرجح بتشتت ثابت حول الصفر كخط وسط موازي لمحور الزمن، كما أن الشكل يجب أن يبدو عشوائيًا خاليًا من أي معلومات يمكن استخدامها في التنبؤ بالسلسلة الزمنية موضع الدراسة. والدراسات الحديثة في مجال الإحصاء بصفة عامة وفي مجال السلاسل الزمنية بصفة خاصة تعطي أهمية لرسم البواقي لا تقل بأي حال من الأحوال عن الاختبارات الإحصائية بل إن البعض يري أن أهمية مثل هذه الرسوم قد تفوق بعض الاختبارات الإحصائية في بعض الأحيان.

فحص دالة الارتباط الذاتي للبواقي

إذا كانت الأخطاء ε_t متغيرات عشوائية بحتة فإن البواقي $\hat{\varepsilon}_t$ يجب أن تعكس هذه الحقيقة ومن ثم فإن دالة الارتباط الذاتي يجب أن تكون خالية تمامًا من أي نتوءات أي يجب أن تكون كل معاملات الارتباط الذاتي صغيرة بشكل يمكن معه قبول عدم اختلاف كل معامل ارتباط ذاتي نظري مناظر معنويًا عن الصفر. ويتم هنا فحص كل معامل ارتباط ذاتي للعينة على حدة، ومن ثم يجب فحص توزيعات المعاينة لهذه المعاملات. وقد أوضحت الدراسة التي قام بها Anderson (1942) أنه إذا كان النموذج ملائمًا – أي إذا كانت الأخطاء ε_t تمثل تغيرات عشوائية بحتة – فإن معاملات الارتباط الذاتي للعينات المتوسطة والكبيرة تكون غير مرتبطة وتتبع توزيعًا معتادًا بانحراف معياري $n^{-\frac{1}{2}}$. وبالتالي فإن معامل الارتباط الذاتي للبواقي عند فجوة زمنية معينة والذي يقع خارج الفترة $\pm 2/\sqrt{n}$ يؤيد اختلاف معامل الارتباط النظري المناظر معنويًا عن الصفر. وبالرغم من بساطة إجراء هذا الاختبار إلا أن التباين $\frac{1}{n}$ يعتبر أكبر من التباين الحقيقي لمعاملات الارتباط الذاتي التي تحسب عند الفجوات الصغيرة، ومن ثم فإن خلو دالة الارتباط الذاتي من أي نتوءات يعتبر مؤشرًا هامًا للقول بأن ε_t تمثل تغيرات عشوائية بحتة ولكنه غير كاف لأن معامل الارتباط الذاتي عند فجوة زمنية صغيرة قد يكون داخل حدي الثقة $\pm 2/\sqrt{n}$ ولكن معامل الارتباط النظري المناظر قد يختلف معنويًا عن الصفر إذا تم مقارنته بالانحراف المعياري

الحقيقي والذي يقل عن $1/\sqrt{n}$. ويعني هذا أنه لا يجب الاكتفاء برسم دالـــة الارتبـــاط الذاتي ورسم حدي الثقة $\pm 2/\sqrt{n}$ للقول بأن ε_t تمثل تغيرات عشوائية بل لا بد مـــن إجراء المزيد من الفحوص والاختبارات الأخرى للاطمئنـــان علـــى عـــشوائية هـــذه المتغيرات.

وفي الواقع أن نتائج ومخرجات عملية التقدير وحساب دالة الارتبـــاط الـــذاتي للبواقي تظل ذات أهمية خاصة حتى وإن كانت هذه النتـــائج والمخرجـــات لا تؤيـــد ملاءمة النموذج وذلك لأن النتوءات الموجودة في دالة الارتباط الـــذاتي للبـــواقي قـــد تستخدم في تعديل النموذج وتحسينه. فعلى سبيل المثال إذا لوحظ وجود نتوء في دالة الارتباط الذاتي عند الفجوة الزمنية الأولى فقد يكون هذا دليلاً على حاجـــة النمـــوذج المبدئي إلى معلمة متوسطات متحركة إضافية خاصة إذا كانت دالة الارتباط الـــذاتي الجزئي يمكن أن يحدها دالة أسية . فإذا افترضنا أن النموذج المبدئي للسلسلة y_t هو $MA(1)$ على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} = (1-\theta B)\varepsilon_t$$

وإذا افترضنا أيضًا أنه بفحص دالة الارتباط الذاتي للبواقي تبين أن الأخطاء ε_t ليست عشوائية وأن البواقي تتبع نموذج $MA(1)$ أيضًا فإن:

$$\varepsilon_t = a_t - ca_{t-1} = (1-cB)a_t$$

حيث $\{a_t\}$ عملية "اضطرابات هادئة" أيضًا. بالتعويض عن ε_t في y_t نصل إلى:

$$y_t = (1-\theta B)(1-cB)\, a_t$$

$$y_t = a_t - \theta_1^* a_{t-1} - \theta_2^* a_{t-2}$$

حيث

$$\theta_1^* = (\theta_1 + c) \;\; ; \;\; \theta_2^* = c\theta$$

وهذا يعني أن $\{y_t\}$ تتبع نموذج MA(2) وليس MA(1)، وفي هذه الحالة يتم توفيق النموذج MA(2) للسلسلة الزمنية وتقدير معالمه وتشخيصه مرة أخرى للتأكد من ملاءمته. ومن جهة أخرى قد يكون النموذج المبدئي الأصلي MA(1) في حاجة إلى معلمة انحدار ذاتي إذا كانت دالة الارتباط الذاتي تتناقص برتابة بشكل أسي أو تقترب تدريجيًا من الصفر بشكل متبادل في الإشارة خاصة إذا كانت دالة الارتباط الذاتي الجزئي للبواقي تنقطع كلية بعد الفجوة الزمنية الأولى. وفي هذه الحالة يتم تعديل النموذج المبدئي إلى نموذج ARMA(1,1) وتوفيق هذا النموذج وتقدير معالمه ثم تشخيصه.

إحصاء بوكس وبيرس المعدل

فحص كل معالم ارتباط ذاتي للبواقي على حدة يعتبر مؤشر مناسب وضروري لدراسة ملاءمة النموذج وفروضه وأهمها عشوائية المتغيرات ε_t. ولكن بالطبع لا يمكن الاكتفاء بهذا النوع من الفحوص لسببين. السبب الأول وقد أوضحناه أنه يوجد بعض الصعوبات عند الفجوات الزمنية الصغيرة والتي قد تؤدي خطئًا إلى اعتبار معامل ارتباط ذاتي نظري عند فجوة زمنية صغيرة لا يختلف معنويًا عن الصفر وهو في حقيقة الأمر يختلف معنويًا عن الصفر إذا استخدم التباين الأصلي بدلاً من التباين التقريبي n^{-1}. السبب الثاني أنه قد يوجد بعض النتوءات خاصة عند الفجوات الزمنية الكبيرة ويظل النموذج ملائمًا حيث إن عشوائية المتغيرات ε_t لا تمنع من وجود بعض معاملات الارتباط الذاتي الكبيرة في العينة والتي يمكن بناءً عليها قبول اختلاف معاملات الارتباط الذاتي النظرية المناظرة عن الصفر لأن البواقي $\hat{\varepsilon}_t$ تظل وكأنها عينة مرصودة من عملية $\{\varepsilon_t\}$. ولهذا كان من الضروري فحص ملائمة النموذج بفلسفة مختلفة، فبدلاً من فحص كل معامل ارتباط ذاتي $r_{\hat{\varepsilon}}(j)$ على حدة يمكن فحص فئة معينة من هذه المعاملات بشكل جماعي. افترض أننا نرمز لأول k من معاملات الارتباط الذاتي للبواقي بالرموز $r_{\hat{\varepsilon}}(1), r_{\hat{\varepsilon}}(2), \cdots, r_{\hat{\varepsilon}}(k)$ والمحسوبة من توفيق عملية

ARMA(p, q) لبيانات السلسلة y_t ،فإن بوكس وبيرس أثبتا أنه إذا كان النموذج الذي تم توفيقه ملائمًا فإن الإحصاء

$$Q = n \sum_{j=1}^{k} r_{\hat{\varepsilon}}^{2}(j)$$

يتبع تقاربيًا توزيع χ^2 بدرجات حرية (k-p-q). فإذا كانت بعض معاملات الارتباط الذاتي ليست قريبة بالقدر الكافي من الصفر فإن قيمة Q تكون كبيرة. وبصفة عامة لا نرفض ملاءمة النموذج أو عشوائية الأخطاء إذا كانت قيمة Q المحسوبة أقل من القيمة الجدولية χ_{α}^{2} حيث تعرف χ_{α}^{2} كما يلي:

$$P[\chi_{(k-p-q)}^{2} > \chi_{\alpha}^{2}] = \alpha$$

حيث يمثل α مستوى المعنوية. واختيار القيمة k تحكمي وتقل قوة هذا الاختبار بزيادة هذه القيمة. ويعمل الإحصاء Q بشكل جيد إذا كان طول السلسلة كبيرًا أو معقولاً، إلا أن تقريبه بواسطة توزيع χ^2 ليس جيدًا إذا كان حجم العينة صغيرًا. وقد قدم Ljung-Box تعديلاً لهذا الإحصاء على الصورة

$$Q^{*} = n(n+2)\sum_{j=1}^{k}\frac{r_{\hat{\varepsilon}}^{2}(j)}{(n-j)}$$

ويمكن تقريب هذا الإحصاء بشكل أفضل من الإحصاء Q بواسطة توزيع χ^2 بدرجات حرية (k-p-q). ويعتمد هذا التقريب على أن التباين $\frac{(n-j)}{n(n+2)}$ يعتبر تقريبًا أقرب لتباين $r_{\hat{\varepsilon}}(j)$ من القيمة $\frac{1}{n}$ خاصة في حالة العينات الصغيرة.

مثال (13):

الجدول الآتي يوضح أول 12 معامل ارتباط ذاتي للبواقي الناتجة من توفيق نمـوذج ARMA(1,1) لبيانات سلسلة طولها 100 مشاهدة

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_{\hat{\varepsilon}}(k)$	0.03	0.04	-0.3	-0.1	0.01	-0.03	0.02	-0.05	0.3	0.1	0.08	-0.1

1. اختبر معنوية اختلاف كل معامل ارتباط نظري مناظر لكل فجوة زمنية عـن الصفر.
2. اختبر ملاءمة النموذج باستخدام إحصاء بوكس وبيرس.
3. اختبر ملاءمة النموذج باستخدام إحصاء Ljung-Box

الحـــــل:

1. $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{10} = 0.1$

$$2n^{-\frac{1}{2}} = 2(0.1) = 0.2$$

ومن ثم فإن كل من $\rho_{\varepsilon}(3)$ و $\rho_{\varepsilon}(9)$ يختلف معنويًا عن الصفر بمستوى معنوية 5%

2. $Q = 100\left[(0.03)^2 + (0.04)^2 + \cdots + (-0.1)^2\right] = 100(0.2228) = 22.28$

$$\chi^2_{0.05} = \chi^2_{10\ 0.05} = 18.3$$

حيث إن $Q > \chi^2_{\alpha}$ يمكن القول بأن هناك شك في ملاءمة النموذج.

$$3.\quad Q^{*}=100(102)\left[\frac{(0.03)^{2}}{99}+\frac{(0.04)^{2}}{98}+\cdots+\frac{(-0.1)^{2}}{88}\right]$$

$$=100(102)(0.0024)=24.33$$

حيث إن $Q^{*} > \chi_{\alpha}^{2}$ يمكن القول بأن هناك شك في ملاءمة النموذج.

مثال (14):

الجدول الآتي يوضح أول 10 معاملات ارتباط ذاتي للبواقي الناتجة من توفيق نموذج ARIMA(0,2,1) لبيانات سلسلة طولها 123 مشاهدة. اختبر ملاءمة النموذج المستخدم باستخدام إحصاء بوكس وبيرس

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{\hat{\varepsilon}}(k)$	0.01	0.02	-0.01	-0.1	0.1	0.01	0.02	0.04	0.03	0.1

الحـــــل:

نفقد مشاهدتين عند أخذ الفروق الثانية للسلة الأصلية، ومن ثم فإن عدد المشاهدات الفعالة هو

$$n^{*}=123-2=121$$

ومن ثم فإن

$$Q=121\left[(0.01)^{2}+(0.02)^{2}+\cdots+(-0.1)^{2}\right]$$

$$=121(0.0336)=4.0656$$

$$\chi_{0.05}^{2}=\chi_{9,0.05}^{2}=16.9$$

قيمة الإحصاء Q المحسوبة أقل كثيرًا من قيمة χ^2 الجدولية، ومن ثم يستدل على عدم وجود نمط غير عشوائي في أول 10 معاملات ارتباط ذاتي للبواقي، وهذا مؤشر هام على ملاءمة النموذج المستخدم.

فحص نموذج الفروق الأولى للبواقي

إذا كانت المتغيرات ε_t تتبع تغيرات عشوائية بحتة فإن الفروق الأولى للبواقي

$$\eta_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

تتبع نموذج متوسطات متحركة من الرتبة الأولى بمعلمة $\theta = 1$. ومن ثم يمكن إيجاد معامل الارتباط الذاتي عند الفجوة الزمنية الأولى السلسلة الفروق η_t كما يلي:

$$Var(\eta_t) = 2\sigma^2$$

$$Cov(\eta_t, \eta_{t-1}) = Cov(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})$$

$$= -\ \sigma^2$$

$$\rho_\eta(1) = cor(\eta_t, \eta_{t-1})$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = -0.5$$

ومن ثم يمكن استغلال هذه الخصائص في اختبار عشوائية المتغيرات ε_t وذلك بنمذجة سلسلة الفروق الأولى للبواقي $\hat{\eta}_t$. إذا كان النموذج الملائم لهذه البيانات هو نموذج MA(1) بمعلمة لا تختلف معنويًا عن الواحد الصحيح ومعامل ارتباط ذاتي عند الفجوة الزمنية الأولى لا يختلف معنويًا عن 0.5- يمكن القول بأن المتغيرات ε_t تتبع تغيرات عشوائية بحتة.

4.3.4 توفيق النموذج الأدنى مباشرة Underfitting

سبق أن ذكرنا أن مرحلة التعرف على النموذج تعتمد على قدر معين من الحكم الشخصي للباحث، فاختبارات الانقطاع والتلاشي لدالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي تعتمد على مستوى المعنوية المستخدم والذي قد يختلف من فجوة زمنية إلى أخرى. وفي بعض الأحيان قد يحتوي النموذج المختار على معلمة ذات رتبة عالية غير ضرورية لأي سبب من الأسباب ومن ثم يكن تبسيط النموذج إلى النموذج الأصغر له مباشرة بحذف هذه المعلمة. ولذلك فإنه من الضروري إجراء بعض الفحوص الإضافية بعيدًا عن تحليل البواقي لنتائج ومخرجات عملية التقدير. فلا بد من دراسة اختلاف المعلمة ذات الرتبة العليا معنويًا عن الصفر بمقارنة تقدير هذه المعلمة بضعف الخطأ المعياري لهذا التقدير. فإذا كان تقدير المعلمة أقل من ضعف الخطأ المعياري فقد يكون من الأفضل حذف هذه المعلمة من النموذج. ولكن قبل حذف هذه المعلمة لابد أيضًا من دراسة معامل الارتباط بين مقدر هذه المعلمة ومقدر كل معلمة من المعالم الأخرى. فإذا لوحظ وجود ارتباط قوي بين مقدر هذه المعلمة ومقدر إحدى المعالم الأخرى، فقد يكون هذا مؤشرًا جيدًا على إمكانية تبسيط النموذج بحذف هذه المعلمة وتوفيق النموذج الأدنى له مباشرة. والجدير بالذكر أنه لا بد من إخضاع النموذج الأبسط لكل الفحوص والاختبارات التشخيصية الممكنة للتأكد من قدرة المقدرات الأخرى على تعويض الآثار المترتبة على حذف المعلمة ذات الرتبة العليا.

وإذا كانت المعلمة ذات الرتبة العليا معنوية فيجب اختبار معنوية المعالم الأخرى وفحص معاملات الارتباط بين مقدرات كل المعالم . فإذا وجد ارتباط كبير بين أي مقدرين فقد يكون هذا دليل على إمكانية حذف إحدى المعلمتين دون أن يؤثر ذلك على ملاءمة النموذج خاصة إذا كانت هذه المعلمة لا تختلف معنويًا عن الصفر. فعلى سبيل المثال إذا كان النموذج الأصلي الذي تم التعرف عليه هو MA(2) وكانت المعلمة θ_2 معنوية بينما كانت المعلمة θ_1 غير معنوية وكان معامل الارتباط بين المقدرين $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$

كبيرًا فقد يكون هذا مؤشرًا على إمكانية حذف المعلمة θ_1 دون الإخلال بكفاءة النموذج ، وفي هذه الحالة يجب توفيق نموذج على الصورة

$$y_t = -\theta \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

مثال (15):

في توفيق النموذج ARMA(0,2) لسلسلة زمنية طولها 64 مشاهدة كان لدينا

$$y_t = -0.5 y_{t-1} + 0.2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

1. اختبر اختلاف المعلمة ϕ_2 معنويًا عن الصفر
2. أوجد تقدير معامل الارتباط بين المقدرين $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$
3. هل تعتقد أنه يمكن تبسيط هذا النموذج؟ اشرح سبب إجابتك.

الحـــــل:

وجدنا عند الحديث عن مرحة التقدير أن مصفوفة التباين والتغاير للمقدرين $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ هي

$$V(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \approx \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1-\phi_2^2 & -\phi_1(1-\phi_2) \\ -\phi_1(1+\phi_2) & 1-\phi_2^2 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فإن

$$V(\hat{\phi}_2) \approx (1-\phi_2^2)/n$$

$$\hat{V}(\hat{\phi}_2) \approx (1-0.04)/64 = 0.015$$

.1 $Z = 0.2/\sqrt{0.015} = 1.63 < 2$

ومن ثم يمكن الاستدلال على أن ϕ_2 لا تختلف معنويًا عن الصفر

.2 $$\rho(\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2)=\frac{-\phi_1(1+\phi_2)/n}{\sqrt{(1-\phi_2^2)(1-\phi_2^2)/n^2}}=\frac{-\phi_1}{1-\phi_2}$$

$$\hat{\rho}(\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2)=0.5/0.8=0.625$$

أي أن تقدير معامل الارتباط بين المقدرين $\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2$ كبير، وهذا يعني أن وجود أحد المقدرين قد يغني عن وجود الآخر.

3. حيث أن معامل الارتباط بين المقدرين كبير والمعلمة ϕ_2 لا تختلف معنويًا عن الصفر فإنه يمكن تبسيط النموذج ARMA(0,2) بحذف المعلمة ϕ_2 واستخدام النموذج ARMA(0,1) بدلاً منه.

4.3.5 توفيق النموذج الأعلى مباشرة Overfitting

الفحوص والاختبارات التي أجريت في المبحث الفرعي السابق كانت للإجابة عن السؤال: هل يحتوي النموذج الذي تم التعرف عليه على معالم غير ضرورية؟. أما الفحوص والاختبارات التي نحن بصددها الآن فهي للإجابة عن السؤال: هل يمكن تحسين كفاءة النموذج الذي تم التعرف عليه بإضافة معلمة جديدة؟. فعلى سبيل المثال إذا كان النموذج الأصلي الذي تم التعرف عليه هو MA(1) فإنه يمكن إضافة معلمة متوسطات متحركة أخرى إلى النموذج، ومن ثم يتم توفيق النموذج MA(2) للبيانات ودراسة التحسن الناتج في نتائج الفحوص التشخيصية. ودراسة معنوية المعلمة المضافة θ_2 والارتباط بين مقدر هذه المعلمة ومقدر المعلمة θ_1 تأتي على قمة هذه الدراسة التشخيصية، فإذا وجد أن المعلمة المضافة θ_2 غير معنوية وأن معامل الارتباط بين المقدرين $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ كبير فإنه يجب حذف المعلمة المضافة θ_2 والاكتفاء بالنموذج الأصلي MA(1) والعكس صحيح. وإضافة معلمة جديدة ممكن أن يتم في الاتجاه الآخر أي بإضافة معلمة انحدار ذاتي إضافية ϕ_1 ومن ثم توفيق النموذج

ARMA(1,1) للبيانات ودراسة معنوية المعلمة ϕ_1 ومعامل الارتباط بين مقـدر ϕ_1 ومقدر θ_1. وتجدر الإشارة إلى أنه عند إضافة معلمة جديدة يجـب اختبـار معنويـة المعلمة الأصلية بعد التعديل. ففي المثال السابق بعد توفيق النموذج ARMA(1,1) قد تكون المعلمة ϕ_1 معنوية بينما تكون المعلمة الأصلية θ_1 غير معنوية، فإذا كان معامل الارتباط بين المقدرين $\hat{\phi}_1, \hat{\theta}_1$ كبير فقد يكون من الأفضل حذف المعلمة الأصـلية θ_1 واستخدام النموذج AR(1) بدلاً من النموذج MA(1). ما نريد أن نؤكد عليه هنـا أن اختبارات حذف بعض المعالم أو إضافة بعض المعالم الأخرى وتحليل البواقي تعتمـد إلى حد كبير على خبرة الباحث العملية وحكمه الشخصي، ولذلك فإن مرحلتي التعرف والتشخيص من أهم وأصعب مراحل التحليل الحديث للسلاسل الزمنية وهما الفيـصل في الحصول على تنبؤات موثوق بها

مثال (16):

في توفيق النموذج MA(1) لسلسلة زمنية طولهـا 200 مـشاهدة حـصلنا علـى النموذج الآتي:

$$y_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

وبتوفيق النموذج الأعلى ARMA(1,1) حصلنا على

$$y_t = \varepsilon_t - 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.2y_{t-1}$$

1. اختبر معنوية المعلمة المضافة.
2. أوجد تقدير معامل الارتباط بين المقدرين $\hat{\phi}, \hat{\theta}$
3. هل تعتقد بضرورة إضافة المعلمة ϕ إلى النموذج الأصلي؟ اشرح سبب إجابتك

الحـــل:

وجدنا سابقًا أن

$$V(\hat{\phi},\hat{\theta}) \approx \frac{(1-\phi\theta)}{n(\phi-\theta)^2}\begin{bmatrix}(1-\phi^2)(1-\phi\theta) & (1-\phi^2)(1-\theta^2)\\ (1-\phi^2)(1-\theta^2) & (1-\theta^2)(1-\phi\theta)\end{bmatrix}$$

ومن ثم فإن

.1 $$V(\hat{\phi}) \approx (1-\phi\theta)^2(1-\phi^2)/n(\phi-\theta)^2$$

$$\hat{V}(\hat{\phi}) \approx (1-0.06)^2(1-0.04)/200(0.2-0.3)^2 = 0.424$$

$$2SE(\hat{\phi}) \approx 1.3 < 2$$

ومن ثم يمكن القول بأن ϕ لا تختلف معنويًا عن الصفر

.2 $$\rho(\hat{\phi},\hat{\theta}) \approx \frac{(1-\phi^2)(1-\theta^2)}{\sqrt{(1-\phi^2)(1-\theta^2)(1-\phi\theta)^2}}$$

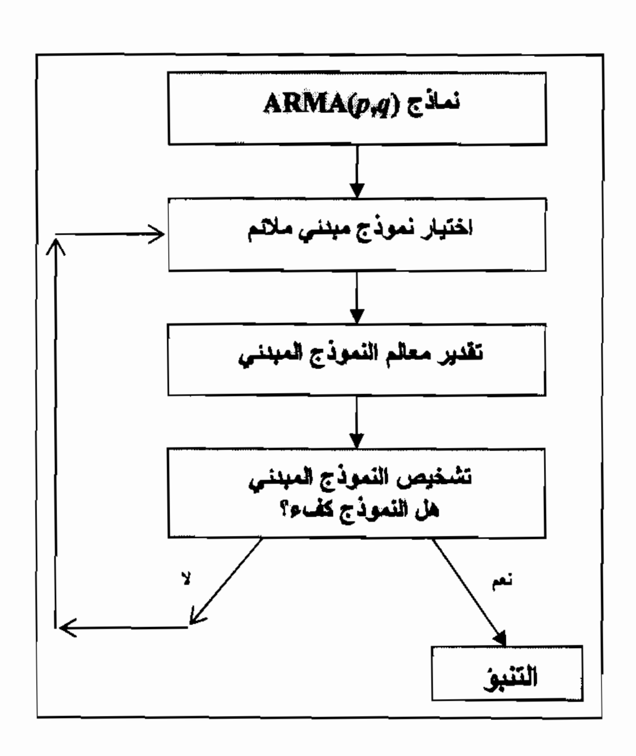
$$\hat{\rho}(\hat{\phi},\hat{\theta}) \approx (0.8736)/(0.879) \cong 0.99$$

3. حيث إن معامل الارتباط بين المقدرين $\hat{\phi},\hat{\theta}$ كبير والمعلمة المضافة غير معنوية لا نعتقد بوجود ضرورة إلى إضافة المعلمة $\hat{\phi}$ إلى النموذج.

4.4 التنبؤ

التنبؤ هو المرحلة الأخيرة من مراحل منهجية بوكس وجينكنز وهو عادة الهدف النهائي من تحليل السلاسل الزمنية. ولا يمكن الانتقال إلى هذه المرحلة إلا بعد أن يجتاز النموذج المبدئي كافة الفحوص والاختبارات التشخيصية التي سبق تقديمها في المبحث السابق. فإذا لم يجتز النموذج المبدئي هذه الفحوص والاختبارات بكفاءة فإنه يجب العودة إلى المرحلة الأولى (مرحلة التعرف) وقراءة دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي بتمهل وإمعان واختيار نموذج مبدئي ثان. فإذا اجتاز هذا النموذج الثاني كافة الفحوص والاختبارات التشخيصية ننتقل إلى مرحلة التنبؤ، وإذا لم يجتزها بكفاءة نعود مرة أخرى إلى المرحلة الأولى لاختيار نموذج ثالث. وتتكرر هذه العملية

حتى نحصل على نموذج يجتاز كل الفحوص والاختبارات بكفاءة. والشكل (4) يوضح هذه العملية المتكررة.



شكل (4) مراحل تطبيق منهجية بوكس وجينكنز

وكما هو واضح أن اختيار النموذج المبدئي وتقدير معالمه وتشخيصه عملية متكررة iterative، بمعنى أنها تعاد وتكرر إلى أن نحصل على نموذج يحقق – أو على الأقل لا يعارض – الفروض النظرية. ومثل هذا النموذج عادة ما يعطي تنبؤات موثوق بها

4.4.1 التنبؤ ذو أصغر متوسط مربعات أخطاء

تتلخص مشكلة التنبؤ في كيفية توظيف النموذج الذي يجتاز كل اختبارات التشخيص والسلسلة المرصودة التي بين أيدينا $y_1, y_2, \cdots, y_n$ للتنبؤ بالقيم المستقبلية التي لم تحدث بعد وهي القيم $y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots$. أي أن المشكلة هنا أننا نريد استخدام المشاهدة الحالية والمشاهدات السابقة في التنبؤ بالمشاهدة التي ستحدث بعد k من الفترات الزمنية أي المشاهدة $y_{n+k}; k = 1,2,\cdots$. وعادة ما يطلق على الرمز k أفق التنبؤ forecast horizon. والاستدلال الإحصائي الكامل للمتغير y_{n+k} يستدعي معرفة دالة كثافة الاحتمال الشرطي لهذا المتغير أي دالة كثافته الاحتمالية بمعلومية تاريخ السلسلة حتى الزمن n أي بمعلومية $y_1, y_2, \cdots, y_n$. ويعرف هذا التوزيع في أعراف السلاسل الزمنية بالتوزيع التنبؤي predictive distribution. وعادة ما يفضل البحث عن قيمة واحدة تكون جيدة لتمثيل مركز هذا التوزيع وتستخدم كتنبؤ نقطة point forecast بالإضافة عن البحث عن فترة تنبؤية predictive interval حول هذه النقطة. وقد يكون اختيار توقع هذا التوزيع – أي التوقع الشرطي للمتغير y_{n+k} بمعلومية تاريخ السلسلة– أفضل نقطة للتنبؤ بقيمة هذا المتغير في المستقبل وذلك لأنه يحقق خاصية هامة وهي أن هذا التوقع الشرطي يحقق الحد الأدنى لمتوسط مربعات الأخطاء mean square errors، بمعنى أنه إذا كان النموذج صحيحًا فإنه لا يوجد تنبؤ آخر يعطي أخطاء متوسط مربعاتها أصغر. ولإثبات هذا قد يكون من المفيد أن نبدأ بتعريف ما نقصده بتوقع (متوسط) مربعات الأخطاء لتنبؤ معين عند نقطة أصل معينة t.

تعريف

إذا كان F أي تنبؤ نقطة للمتغير y_{n+k} عند نقطة أصل معينة t فإن توقع (متوسط) مربعات الأخطاء للتنبؤ F بمعلومية تاريخ السلسلة حتى نقطة الأصل t يعرف بأنه

$$MSE(F) = E[(y_{t+k} - F)^2 | y_t, y_{t-1}, \cdots] \qquad (4.4.1)$$

وإذا كانت t تمثل نقطة أصل معينة فإننا سنرمز لتوقع y_{t+k} الشرطي بالرمز $y_t(k)$ أي أن

$$y_t(k) = E(y_{t+k} | y_t, y_{t-1}, \cdots) \qquad (4.4.2)$$

وفي الواقع أن $y_t(k)$ كتنبؤ نقطة للمتغير y_{t+k} له خاصية جيدة وهي أنه ينتج أخطاء ذات أقل متوسط مربعات، ولذلك يطلق عليه التنبؤ ذو أصغر متوسط مربعات أخطاء minimum mean square error (MMSE) forecast، ولبرهان هذه الخاصية افترض أن لدينا تنبؤ آخر نرمز له بالرمز F وأن الفرق بين هذا التنبؤ وتنبؤ النقطة $y_t(k)$ هو d، ومن ثم فإن

$$F = y_t(k) + d \qquad (4.4.3)$$

متوسط مربعات الأخطاء الذي يناظر التنبؤ F يعرف بالصورة (4.4.1). بالتعويض من (4.4.3) في (4.4.1)

$$MSE(F) = E\{[(y_{t+k} - y_t(k)) - d)]^2 | y_t, y_{t-1}, \cdots\}$$

$$= E[(y_{t+k} - y_t(k))^2 | y_t, y_{t-1}, \cdots] - 2dE[(y_{t+k} - y_t(k)) | y_t, y_{t-1}, \cdots] + d^2$$

الحد الأول في الطرف الأيمن يعطي متوسط مربعات الأخطاء المناظر للتنبؤ $y_t(k)$، والحد الأوسط يساوي الصفر بسبب العلاقة (4.4.2) والحد الثالث d^2 قيمته موجبة دائمًا، ومن ثم فإن

$$MSE(F) \geq MSE[y_t(k)]$$

ولا يحدث التساوي في هذه المتباينة إلا إذا كانت $d = 0$، أي أن التساوي لا يحدث إلا إذا كان $F = y_t(k)$ ، ومن ثم فإن التوقع الشرطي $y_t(k)$ ينـــتج أخطـــاء ذات أقـــل متوسط مربعات. وبذلك يكون البرهان قد تم.

وتجدر الإشارة هنا إلى بعض الحقائق الهامة الخاصة بالتنبؤ $y_t(k)$ والمعرف في الصورة (4.4.2) والتي يجب وضعها في الاعتبار عند إجراء الحسابات الخاصة بـــه وهي:

1- أن هذا التوقع الشرطي يتطلب نظريًا معرفة كل قيم السلسلة الماضـــية، ولكـــن عمليًا وبسبب فرض الانعكاس- الذي يتطلب تقارب الأوزان π_i - يمكن القول بأنه يوجد قيمة معينة للسلسلة ولتكن y_{t-r} يتلاشى قبلها أثر ماضي أو تـــاريخ السلسلة.

2- أن هذا التوقع الشرطي بمعلومية تاريخ السلـــسلة $y_t, y_{t-1}, \cdots$ يعـــادل التوقـــع الشرطي لنفس المتغير بمعلومية المتغيرات $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \cdots$.

3- أن جميع المتغيرات حتى الزمن t قد تم رصدها وأنها لم تعـــد الآن متغيـــرات عشوائية وإنما هي قيم ثابتة، أي أن المتغيرات $y_t, y_{t-1}, \cdots, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \cdots$ لم تعد متغيرات بل أصبحت قيمًا معروفة أو يمكن حسابها أو تقديرها بشكل أو بـــآخر ولذلك فإن

$$E(y_{t-j}|y_t, y_{t-1}, \cdots) = y_{t-j} \quad ; j = 0,1,2,\cdots$$

$$E(\varepsilon_{t-j}|y_t, y_{t-1}, \cdots) = \varepsilon_{t-j} \quad ; j = 0,1,2,\cdots$$

4- في التوقعات المستقبلية يجب أن نراعي أن

$$E(y_{t+j}|y_t, y_{t-1}, \cdots) = y_t(j) \quad ; j = 1,2,\cdots$$

وذلك من الصورة (4.4.2)

$$E(\varepsilon_{t+j}|y_t, y_{t-1}, \cdots) = 0 \quad ; j = 1,2,3$$

والأمثلة الآتية توضح كيفية حساب تنبؤات النقطة لبعض العمليات

مثال (17):

إذا كان $y_t - 0.7\,y_{t-1} = \varepsilon_t$ أوجد تنبــؤات النقطــة للمتغيــرات y_{t+1} و y_{t+2} و y_{t+3}

الحـــــل:

$$y_t = 0.7 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t(1) = E(y_{t+1}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$= E(0.7y_t + \varepsilon_{t+1}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$= 0.7E(y_t|y_t, y_{t-1}, \cdots) + E(\varepsilon_{t+1}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$y_t(1) = 0.7 y_t$$

وبالمثل

$$y_t(2) = E(y_{t+2}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$= E(0.7y_{t+1} + \varepsilon_{t+2}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$y_t(2) = 0.7E(y_{t+1}|y_t, y_{t-1}, \cdots) + E(\varepsilon_{t+2}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$y_t(2) = 0.7 y_t(1)$$

$$y_t(3) = E(y_{t+3}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$= E(0.7y_{t+2} + \varepsilon_{t+3}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$= 0.7E(y_{t+2}|y_t, y_{t-1}, \cdots) = 0.7y_t(2)$$

مثال (18):

إذا كان $(1-0.5B)(1-B)y_t = \varepsilon_t$ أوجد تنبؤي النقطة للمتغيرين $y_{t+k} \;; k = 1,2$

الحـــل:

$$(1-0.5B)(y_t - y_{t-1}) = \varepsilon_t$$

$$y_t = 0.5y_{t-1} + y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$y_t = 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$y_t(1) = E(y_{t+1}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$= E(1.5y_t - 0.5y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$y_t(1) = 1.5y_t - 0.5y_{t-1}$$

بالمثل

$$y_t(2) = E(y_{t+2}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$= E(1.5y_{t+1} - 0.5y_t + \varepsilon_{t+2}|y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$y_t(2) = 1.5y_t(1) - 0.5y_t$$

مثال (19):

إذا كـــان $(1-B)y_t = \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1}$ أوجـــد تنبـــؤي النقطـــة للمتغيـــرين $y_{t+k} \quad ; k = 1,2$

الحـــــل:

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1}$$

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1}$$

$$y_t(1) = E(y_{t+1} | y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$= E(y_t + \varepsilon_{t+1} - 0.4\varepsilon_t | y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$y_t(1) = y_t - 0.4\varepsilon_t$$

$$y_t(2) = E(y_{t+2} | y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$= E(y_{t+1} + \varepsilon_{t+2} - 0.4\varepsilon_{t+1} | y_t, y_{t-1}, \cdots)$$

$$y_t(2) = y_t(1)$$

مثال (20):

إذا كان $(1-B)^2 y_t = (1-0.5B+0.3B)^2 \varepsilon_t$ أوجد تنبؤات النقطـــة للمتغيـــرات y_{t+1} , y_{t+2} , $y_{t+k} \;; k = 3,4,\cdots$

الحـــــل:

$$(1-2B+B^2)y_t = (1-0.5B+0.3B^2)\varepsilon_t$$

$$y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2}$$

ومن ثم فإن

$$y_{t+k} = 2y_{t+k-1} - y_{t+k-2} + \varepsilon_{t+k} - 0.5\varepsilon_{t+k-1} + 0.3\varepsilon_{t+k-2}$$

$$y_t(1) = E\ (y_{t+1}|y_t, y_{t-1}, \cdots) = 2y_t - y_{t-1} - 0.5\varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$$

$$y_t(2) = 2y_t(1) - y_t + 0.3\varepsilon_t$$

$$y_t(k) = 2y_t(k-1) - y_t(k-2) \quad ; \quad k = 3,4,5,\cdots$$

ويمكن استخدام الصيغة الأخيرة في الحصول على التنبؤات بشكل تتابعي.

4.4.2 تقدير الأخطاء والتنبؤ بالمشاهدات المستقبلية

افترض أننا نقف عند نقطة أصل معينة t وأننا نعلم تاريخ أو ماضي السلسلة الزمنية حتى هذه النقطة الزمنية أي نعلم $y_t, y_{t-1}, \ldots$. أحد التنبؤات التي لها أهمية خاصة في مجال السلاسل الزمنية هو التنبؤ بالمشاهدة التالية y_{t+1}

وقد ذكرنا أن تنبؤ النقطة للمتغير y_{t+1} هو

$$y_t(1) = E(y_{t+1}|y_t, y_{t-1}, \ldots)$$

وافترض أن لدينا النموذج المختلط العام ARMA (P, q) والمعرف على الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} - \theta_1\varepsilon_t - \theta_2\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

(4.4.4)

لإيجاد تنبؤ المشاهدة التالية يفضل أن نكتب النموذج للمتغير y_{t+1} كالتالي:

$$y_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t+1-p} - \theta_1\varepsilon_t - \theta_2\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t+1-q}$$

(4.4.5)

ومن ثم فإن

$$y_t(l) = E(y_{t+l} | y_t, y_{t-1}, \ldots)$$

$$y_t(l) = \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t+l-p} - \theta_1 \varepsilon_t - \theta_2 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t+l-q}$$

(4.4.6)

ويمثل $y_t(l)$ تنبؤ المشاهدة التالية. والقيم $y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t+l-p}$ معروفة من السلسلة التي بين أيدينا. ولكن السؤال الهام هو كيف نقدر القيم $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t+l-q}$ ؟. لإيجاد تقديرات لهذه القيم نلاحظ أن $i = 0,1,2,\ldots$ ، ε_{t-i} هو الخطأ في التنبؤ بالقيمة y_{t-i} والمحسوب عند الزمن (t-i-1)، بمعني آخر

$$\varepsilon_{t-i} = y_{t-i} - y_{t-i-1}(1) \quad ; i = 0,1,\cdots \tag{4.4.7}$$

أي أن الخطأ ε_{t-i} هو الفرق بين القيمة المشاهدة عند الزمن (t-i) والتنبؤ بهذه القيمة عند الزمن (t-i-1). ويمكن إثبات ذلك جبريًا بسهولة بحساب y_{t-i} من (5.4.4) وحساب $y_{t-i-1}(1)$ من (4.4.6) وأخذ الفرق بينهما. وعلي أية حال فإن الحس الإحصائي وراء الصورة (4.4.7) سهل وواضح وتعودنا عليه مرارًا في علم الإحصاء وهو أنه عند الزمن (t-i-1) قد استخدمنا $y_{t-i-1}(1)$ للتنبؤ بالمتغير y_{t-i}، ومن ثم فالفرق بين القيمتين الأخيرتين يعبر عن الخطأ في التنبؤ عند الزمن (t - i). وفي الواقع عند حساب تقديرات الأخطاء ε_t نتعرض لما يعرف بمشكلة القيم الابتدائية. والمثالان الآتيان يوضحان كيفية تقدير هذه القيم وكيفية استخدام هذه التقديرات في حساب وتقدير الأخطاء والتنبؤ بالمشاهدات المستقبلية.

مثال (21):

إذا كان $t=1,2,\ldots,n \;;\; y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ ، أوجد تنبؤات المشاهدات التالية وتنبؤ المشاهدة المستقبلية الأولى

الحـــــل:

$$y_{t+1} = \varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t$$

$$y_t(1) = E\,(y_{t+1} | y_t, y_{t-1},\ldots) = -\theta\varepsilon_t \qquad (1)$$

من (4.4.7)

$$\varepsilon_t = y_t - y_{t-1}(1) \;\;;\;\; t = 1,2,\ldots,$$

بالتعويض في (1)

$$y_t(1) = -\theta[\,y_t - y_{t-1}(1)\,] \qquad (2)$$

نبدأ بالمشكلة الابتدائية عند الزمن $t=0$

$$y_0(1) = E(y_1) = E(\varepsilon_1 - \theta\varepsilon_0)$$

$$= -\theta\varepsilon_0$$

القيمة ε_0 هي القيمة الابتدائية للمتغير ε_t وسنضع بدلاً منها تقدير معـــين معلـــوم وليكن $\hat{\varepsilon}_0$.

ومن ثم فإن

$$y_0(1) = -\theta\hat{\varepsilon}_0 \qquad (3)$$

ضع $t=1$ في(2)

$$y_1(1) = -\theta[\,y_1 - y_0(1)\,]$$

$$= -\theta y_1 + \theta y_0(1)$$

بالتعويض من (3) عن $y_0(1)$

$$y_1(1) = -\theta y_1 - \theta^2 \hat{\varepsilon}_0 \qquad (4)$$

بوضع $t=2$ في (2)

$$y_2(1) = -\theta[\, y_2 - y_1(1)\,]$$

$$= -\theta y_2 + \theta y_1(1)$$

بالتعويض من (4) عن $y_1(1)$

$$y_2(1) = -\theta y_2 + \theta[-\theta y_1 - \theta^2 \hat{\varepsilon}_0\,]$$

$$= -\theta y_2 - \theta^2 y_1 - \theta^3 \hat{\varepsilon}_0$$

بالاستمرار في التعويض في العلاقة (2) عن $t=3$ ثم $t=4$ إلى أن نصل إلى $t=n$، في هذه الحالة نجد أن

$$y_n(1) = -\theta[\, y_n - y_{n-1}(1)\,]$$

$$= -\theta y_n - \theta^2 y_{n-1} - \theta^3 y_{n-2} - \ldots - \theta^n y_1 - \theta^{n+1} \hat{\varepsilon}_0$$

والآن قد أمكن رصد جميع تنبؤات المشاهدات التالية $y_t(1)$ بدلالة قيم السلسلة المتاحة $y_1, y_2, \cdots, y_n$ وتقدير الخطأ الابتدائي $\hat{\varepsilon}_0$. بزيادة حجم العينة n نجد أن تأثير الحد الأخير $\theta^{n+1}\hat{\varepsilon}_0$ يتضاءل لأن $|\theta| < 1$، ولذلك عادة ما يفضل تقدير ε_0 بواسطة توقعه غير الشرطي أي الصفر، ومن ثم نصل إلى

$$y_n(1) = -\theta y_n - \theta^2 y_{n-1} - \theta^3 y_{n-2} - \ldots - \theta^n y_1$$

وعادة ما تكون المعلمة θ مجهولة ويتم استبدالها بتقدير مناسب وليكن $\hat{\theta}$ في حساب التنبؤات $y_t(1)$ والتي يرمز لها في هذه الحالة بالرمز $\hat{y}_t(1)$، كما يرمز للأخطاء المقدرة في هذه الحالة بالرمز $\hat{\varepsilon}_t$ حيث

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_{t-1}(1) \;\; ; \;\; t = 1,2,\ldots,n$$

وبذلك يكون تقدير تنبؤ المشاهدة الأولى المستقبلية

$$\hat{y}_n(1) = -\hat{\theta} y_n - \hat{\theta}^2 y_{n-1} - \hat{\theta}^3 y_{n-2} - \ldots - \hat{\theta}^n y_1$$

مثال(22):

المشاهدات الآتية تمثل القيم $y_{41}, y_{42}, \cdots, y_{50}$ من بيانات سلسلة زمنية تم توفيقها بواسطة النموذج

$$(1-B)y_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2}$$

16	22	22	19	14	18	21	17	18	22

1. أوجد تنبؤ المشاهدة المستقبلية الأولى $y_{50}(1)$ [افترض أن $\hat{\varepsilon}_{40} = \hat{\varepsilon}_{41} = 0$]
2. أوجد تنبؤات المشاهدات المستقبلية الثانية والثالثة والرابعة $(y_{50}(k) \;;\; k = 2,3,4)$

الحل:

يمكن أن يكتب النموذج على الصورة

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2}$$

$$y_{t+1} = y_t + \varepsilon_{t+1} - 0.5\varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$$

ومن ثم فإن

$$\hat{y}_t(1) = \hat{E}\;(y_{t+1} | y_t, y_{t-1}, \ldots) = y_t - 0.5\hat{\varepsilon}_t + 0.3\hat{\varepsilon}_{t-1} \qquad (1)$$

تنبؤ المشاهدة المستقبلية الأولى

$$\hat{y}_{50}(1) = y_{50} - 0.5\hat{\varepsilon}_{50} + 0.3\hat{\varepsilon}_{49} \qquad (2)$$

y_{50} معلومة ولكن كيف يمكن إيجاد $\hat{\varepsilon}_{50}$, $\hat{\varepsilon}_{49}$ ؟

لإيجاد $\hat{\varepsilon}_{50}$, $\hat{\varepsilon}_{49}$ لابد من معرفة $\hat{\varepsilon}_{42}, \hat{\varepsilon}_{43}, \cdots, \hat{\varepsilon}_{48}$ وذلك بالاستفادة من التقديرين المبدئيين $\hat{\varepsilon}_{41} = 0$; $\hat{\varepsilon}_{40} = 0$ كما يلي:

لإيجاد $\hat{\varepsilon}_{42}$ يجب معرفة $\hat{y}_{41}(1)$. من (1) نجد أن

$$\hat{y}_{41}(1) = y_{41} - 0.5\hat{\varepsilon}_{41} + 0.3\hat{\varepsilon}_{40}$$

$$= 16 - 0.5(0) + 0.3(0) = 16$$

ومن ثم فإن

$$\hat{\varepsilon}_{42} = y_{42} - \hat{y}_{41}(1) = 22 - 16 = 6$$

لإيجاد $\hat{\varepsilon}_{43}$ يجب معرفة $\hat{y}_{42}(1)$. من (1) نجد أن

$$\hat{y}_{42}(1) = y_{42} - 0.5\hat{\varepsilon}_{42} + 0.3\hat{\varepsilon}_{41}$$

$$= 22 - 0.5(6) + 0.3(0) = 19$$

ومن ثم فإن

$$\hat{\varepsilon}_{43} = y_{43} - \hat{y}_{42}(1) = 22 - 19 = 3$$

لإيجاد $\hat{\varepsilon}_{44}$ يجب معرفة $\hat{y}_{43}(1)$. من (1) نجد أن

$$\hat{y}_{43}(1) = y_{43} - 0.5\hat{\varepsilon}_{43} + 0.3\hat{\varepsilon}_{42}$$

$$= 22 - 0.5(3) + 0.3(6) = 22.3$$

ومن ثم فإن

$$\hat{\varepsilon}_{44} = y_{44} - \hat{y}_{43}(1) = 19 - 22.3 = -3.3$$

لإيجاد $\hat{\varepsilon}_{45}$ يجب معرفة $\hat{y}_{44}(1)$. من (1) نجد أن

$$\hat{y}_{44}(1) = y_{44} - 0.5\hat{\varepsilon}_{44} + 0.3\hat{\varepsilon}_{43}$$

$$= 19 - 0.5(-3.3) + 0.3(3) = 21.55$$

ومن ثم فإن

$$\hat{\varepsilon}_{45} = y_{45} - \hat{y}_{44}(1) = 14 - 21.55 = -7.55$$

لإيجاد $\hat{\varepsilon}_{46}$ يجب معرفة $\hat{y}_{43}(1)$. من (1) نجد أن

$$\hat{y}_{45}(1) = y_{45} - 0.5\hat{\varepsilon}_{45} + 0.3\hat{\varepsilon}_{44}$$

$$= 14 - 0.5(-7.55) + 0.3(-3.3) = 16.785$$

ومن ثم فإن

$$\hat{\varepsilon}_{46} = y_{46} - \hat{y}_{45}(1) = 18 - 16.785 = 1.215$$

لإيجاد $\hat{\varepsilon}_{47}$ يجب معرفة $\hat{y}_{46}(1)$. من (1) نجد أن

$$\hat{y}_{46}(1) = y_{46} - 0.5\hat{\varepsilon}_{46} + 0.3\hat{\varepsilon}_{45}$$

$$= 18 - 0.5(1.215) + 0.3(-7.55) = 15.1275$$

ومن ثم فإن

$$\hat{\varepsilon}_{47} = y_{47} - \hat{y}_{46}(1) = 21 - 15.1275 = 5.8725$$

لإيجاد $\hat{\varepsilon}_{48}$ يجب معرفة $\hat{y}_{47}(1)$. من (1) نجد أن

$$\hat{y}_{47}(1) = y_{47} - 0.5\,\hat{\varepsilon}_{47} + 0.3\,\hat{\varepsilon}_{46}$$

$$= 21 - 0.5(5.8725) + 0.3(1.215) = 18.42825$$

ومن ثم فإن

$$\hat{\varepsilon}_{48} = y_{48} - \hat{y}_{47}(1) = 17 - 18.42825 = -1.42825$$

لإيجاد $\hat{\varepsilon}_{49}$ يجب معرفة $\hat{y}_{48}$ (1). من (1) نجد أن

$$\hat{y}_{48}(1) = y_{48} - 0.5\hat{\varepsilon}_{48} + 0.3\hat{\varepsilon}_{47}$$

$$= 17 - 0.5(-1.42825) + 0.3(5.8725) = 19.475875$$

ومن ثم فإن

$$\hat{\varepsilon}_{49} = y_{49} - \hat{y}_{48}(1) = 18 - 19.475875 = -1.475875$$

لإيجاد $\hat{\varepsilon}_{50}$ يجب معرفة $\hat{y}_{49}$ (1). من (1) نجد أن

$$\hat{y}_{49}(1) = y_{49} - 0.5\hat{\varepsilon}_{49} + 0.3\hat{\varepsilon}_{48}$$

$$= 18 - 0.5(-1.475875) + 0.3(-1.42825) = 18.3094625$$

ومن ثم فإن

$$\hat{\varepsilon}_{50} = y_{50} - \hat{y}_{49}(1) = 22 - 18.3094625 = 3.6905375$$

وبهذا يكون قد تم إيجاد $\hat{\varepsilon}_{50}$, $\hat{\varepsilon}_{49}$. بالتعويض عنهما في (2)

$$\hat{y}_{50}(1) = 22 - 0.5(3.6905375) + 0.3(-1.475875) = 19.712$$

$$y_{t+2} = y_{t+1} + \varepsilon_{t+2} - 0.5\,\varepsilon_{t-1} + 0.3\,\varepsilon_{t}$$

$$\hat{y}_{t}(2) = \hat{y}_{t}(1) + 0.3\hat{\varepsilon}_{t}$$

$$\hat{y}_{50}(2) = \hat{y}_{50}(1) + 0.3\hat{\varepsilon}_{50}$$

$$\hat{y}_{50}(2) = 19.712 + .0.3(3.6905375) = 20.8192$$

بالمثل

$$\hat{y}_t(3) = \hat{y}_t(2)$$

$$\hat{y}_{50}(3) = \hat{y}_{50}(2) = 20.8192$$

بالمثل

$$\hat{y}_{50}(4) = \hat{y}_{50}(5) = \cdots = 20.8192$$

4.4.3 فترات التنبؤ

لا يقتصر الاهتمام في مجالات الإحصاء بصفة عامة وفي مجال السلاسل الزمنية بصفة خاصة على إيجاد تنبؤات النقطة للمشاهدات المستقبلية وإنما يمتد هذا الاهتمام ليشمل بناء فترات تنبؤ لمثل هذه المشاهدات. ويهدف هذا المبحث إلى اشتقاق صيغة لأخطاء التنبؤ بدلالة أوزان ψ_i والتي سبق تقديمها في الباب السابق، كما يهدف هذا المبحث إلى اشتقاق صيغة لتباين هذه الأخطاء وبناء فترات تنبؤ للمشاهدات المستقبلية. ولتحقيق هذه الأهداف نستدعي صيغة الاضطرابات الهادئة للسلاسل الساكنة من الباب السابق وهي

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots$$

ومن ثم يمكن التعبير عن y_{t+k} على الصورة

$$y_{t+k} = \varepsilon_{t+k} + \psi_1 \varepsilon_{t+k-1} + \psi_2 \varepsilon_{t+k-2} + \cdots$$

$$y_{t+k} = (\varepsilon_{t+k} + \psi_1 \varepsilon_{t+k-1} + \cdots + \psi_{k-1} \varepsilon_{t+1}) + (\psi_k \varepsilon_t + \psi_{k+1} \varepsilon_{t-1} + \cdots) \tag{4.4.8}$$

وبأخذ التوقع الشرطي

$$y_t(k) = E\ (y_{t+k}|y_t, y_{t-1},\ldots) = \psi_k \varepsilon_t + \psi_{k+1}\varepsilon_{t-1} + \ldots \qquad (4.4.9)$$

بالتعويض من (4.4.9) في (4.4.8) نصل إلى

$$y_{t+k} = (\varepsilon_{t+k} + \psi_1\ \varepsilon_{t+k-1} + \cdots + \psi_{k-1}\ \varepsilon_{t+1}) + y_t(k)$$

ومن ثم فإن

$$y_{t+k} = e_t(k) + y_t(k)$$

حيث

$$e_t(k) = y_{t+k} - y_t(k) = \varepsilon_{t+k} + \psi_1 \varepsilon_{t+k-1} + \ldots + \psi_{k-1}\varepsilon_{t+1} \qquad (4.4.10)$$

ويعبر $e_t(k)$ عن الخطأ في التنبؤ $y_t(k)$، أي خطأ التنبؤ لعدد k من الفترات القادمة، وهو متغير عشوائي يمكن إيجاد توقعه وتباينه كما يلي:

$$E[e_t(k)] = E[\varepsilon_{t+k} + \psi_1 \varepsilon_{t+k-1} + \ldots + \psi_{k-1}\varepsilon_{t+1}] = 0$$

$$Var[e_t(k)] = \sigma^2 [1 + \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j^2] \qquad (4.4.11)$$

وبصفة خاصة فإن

$$Var[e_t(1)] = \sigma^2 \quad ; \quad Var[e_t(2)] = \sigma^2 [1 + \psi_1^2] \ ;$$

$$Var[e_t(3)] = \sigma^2 [1 + \psi_1^2 + \psi_2^2]$$

افترض أن المتغيرات ε_t تتبع توزيع معتاد. من الصورة (4.4.8) وبمعلومية تـاريخ السلسلة حتى الزمن t – وهذا يعادل معرفة ε حتى الزمن t – فإن y_{t+k} يتبع توزيـع معتاد توقعه $y_t(k)$ وتباينه يساوي تباين $e_t(k)$ أي أن

$$E\,(y_{t+k}|y_t, y_{t-1},\ldots) = y_t(k)$$

$$Var(y_{t+k}|y_t, y_{t-1}, \ldots) = Var(y_{t+k}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots) = Var[e_t(k)]$$

$$= \sigma^2[1 + \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j^2]$$

ومن ثم فإن $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة للمشاهدة y_{t+k} هي

$$y_t(k) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j^2}$$

حيث تعتمد المعاملات ψ_j و $y_t(k)$ على معالم النموذج الرئيسية ϕ, θ. وعادة مـا تكون المعالم σ^2, ϕ, θ مجهولة ، ولذلك تستخدم بدلاً منها التقديرات $s^2, \hat{\phi}, \hat{\theta}$. ومن ثم فإن $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة تقريبية للمشاهدة y_{t+k} هي

$$\hat{y}_t(k) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} s \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\psi}_j^2}$$

وبصفة خاصة فإن $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة تقريبية للمشاهدة y_{n+1} هي

$$\hat{y}_t(1) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} s$$

مثال(23):

إذا كان $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$. أوجد أخطاء التنبؤ للمشاهدات المستقبلية واوجد تباينها واوجد فترة ثقة مناسبة لكل من y_{n+2}, y_{n+1}.

الحـــــل:

سبق أن رأينا في الباب الثالث أنه يمكن كتابة النموذج AR(1) باستخدام أوزان ψ_j وذلك بوضع

$$\psi_j = \phi^j \quad , \quad j = 1, 2, \cdots$$

ومن ثم فإن من (4.4.10) خطأ التنبؤ للمشاهدة y_{n+k} هو

$$e_n(k) = \varepsilon_{n+k} + \psi_1 \varepsilon_{n+k-1} + \cdots + \psi_{k-1}\varepsilon_{n+1}$$

$$= \varepsilon_{n+k} + \phi\varepsilon_{n+k-1} + \cdots + \phi^{k-1}\varepsilon_{n+1}$$

وبصفة خاصة

$$e_n(1) = \varepsilon_{n+1}$$

$$e_n(2) = \varepsilon_{n+2} + \phi\varepsilon_{n+1}$$

تباين أخطاء التنبؤ للمشاهدة y_{n+k} من (4.4.11)

$$Var[e_n(k)] = \sigma^2[1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots + \phi^{2(k-1)}]$$

وبصفة خاصة

$$Var[e_n(1)] = \sigma^2 \qquad ; \ Var[e_n(2)] = \sigma^2 (1 + \phi^2)$$

أيضًا تنبؤات النقطة هي

$$y_n(1) = \phi y_n$$

$$y_n(2) = \phi y_n(1) = \phi^2 y_n$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_n(k) = \phi^k y_n$$

ومن ثم فإن $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة تقريبية للمشاهدة y_{n+1} هي

$$\hat{\phi} y_n \pm z_{\frac{\alpha}{2}} s$$

أيضًا $(1-\alpha)100\%$ فترة تقريبية للمشاهدة y_{n+2} هي

$$\hat{\phi}^2 y_n \pm z_{\frac{\alpha}{2}} s\sqrt{1+\hat{\phi}^2}$$

مثال (24):

إذا كان $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ ، أوجد خطأي التنبــؤ للمــشاهدتين y_{n+1} و y_{n+2} وتباين كل منهما وفترة ثقة ملائمة لكل منهما

الحــــــل:

يمكن أثبات أن

$$\psi_1 = \phi_1 \qquad ; \qquad \psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$$

ومن ثم فإن

$$e_n(1) = \varepsilon_{n+1}$$

$$e_n(2) = \varepsilon_{n+2} + \psi_1 \varepsilon_{n+1}$$

$$= \varepsilon_{n+2} + \phi_1 \varepsilon_{n+1}$$

$$Var[e_n(1)] = \sigma^2$$

$$Var[e_n(2)] = \sigma^2(1+\psi_1^2) = \sigma^2(1+\phi_1^2)$$

$$y_n(1) = \phi_1 y_n + \phi_2 y_{n-1}$$

$$y_n(2) = \phi_1 y_n(1) + \phi_2 y_n = \phi_1^2 y_n + \phi_1\phi_2 y_{n-1} + \phi_2 y_n$$

$(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة تقريبية للمشاهدة y_{n+1} هي

$$(\hat{\phi}_1 y_n + \hat{\phi}_2 y_{n-1}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} s$$

$(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة تقريبية للمشاهدة y_{n+2} هي

$$(\hat{\phi}_1^2 y_n + \hat{\phi}_1\hat{\phi}_2 y_{n-1} + \hat{\phi}_2 y_n) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} s\sqrt{1+\hat{\phi}_1^2}$$

مثال (25):

إذا كان $(1-B)y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$

أوجد أخطاء التنبؤ للمشاهدات y_{n+1} ، y_{n+2} ، y_{n+3} وتباين كل منها وفترة ثقة ملائمة لكل منها

الحـــــل:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

$$y_n(1) = y_n - \theta\varepsilon_n$$

$$y_n(2) = y_n(1) = y_n - \theta\varepsilon_n$$

وبصفة عامة

$$y_n(k) = y_n(k-1) = y_n - \theta\varepsilon_n$$

أي أن كل التنبؤات المستقبلية متساوية

للحصول على أوزان ψ_j

$$(1-B)y_t = (1-\theta B)\varepsilon_t$$

$$y_t = (1-B)^{-1}(1-\theta B)\varepsilon_t = (1+B+B^2+\cdots)(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})$$

$$y_t = (1-\theta)\varepsilon_{t-1} + (1-\theta)\varepsilon_{t-2} + (1-\theta)\varepsilon_{t-3} + \cdots$$

وبالتالي فإن

$$\psi_j = (1-\theta) \quad ; \quad j = 1,2,\cdots$$

ومن ثم فإن

$$e_n(1) = \varepsilon_{n+1}$$

$$e_n(2) = \varepsilon_{n+2} + (1-\theta)\varepsilon_{n+1}$$

$$e_n(3) = \varepsilon_{n+3} + (1-\theta)\varepsilon_{n+2} + (1-\theta)\varepsilon_{n+1}$$

وبصفة عامة

$$e_n(k) = \varepsilon_{n+k} + (1-\theta)[\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \cdots + \varepsilon_{n+k-1}]$$

تباينات الأخطاء

$$Var[e_n(1)] = \sigma^2$$

$$Var[e_n(2)] = \sigma^2\ [1 + (1-\theta)^2]$$

$$Var[e_n(3)] = \sigma^2\ [1 + 2(1-\theta)^2]$$

وبصفة عامة

$$Var[e_n(k)] = \sigma^2\ [1 + (k-1)(1-\theta)^2]$$

إذا استخدمت التقديرات بدلاً من المعالم فإن

$$\hat{y}_n(k) = \hat{y}_n(1) = y_n - \hat{\theta}\hat{\varepsilon}_n$$

و $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة تقريبية للمشاهدة y_{n+k} هي

$$\hat{y}_n(k) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} s\sqrt{1 + (k-1)(1-\hat{\theta})^2}$$

مثال (26):

إذا كان $y_t \sim ARMA(1,1)$. اوجد خطأي التنبؤ للمشاهدتين y_{n+1} و y_{n+2} وتبـــاين هذين الخطأين ثم أوجد فترة ثقة لكل من y_{n+1} و y_{n+2}

الحـــــــل:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

$$y_n(1) = \phi y_n - \theta\varepsilon_n$$

$$y_n(2) = \phi y_n(1) = \phi^2 y_n - \phi\theta\varepsilon_n$$

$$y_n(3) = \phi y_n(2)$$

وبصفة عامة

$$y_n(k) = \phi y_n(k-1) \qquad ; k \ge 2$$

سبق أن رأينا في الباب السابق أن

$$\psi_j = (\phi - \theta)\phi^{j-1} \qquad ; j = 1,2,\cdots$$

$$e_n(1) = \varepsilon_{n+1}$$

$$e_n(2) = \varepsilon_{n+2} + \psi_1\varepsilon_{n+1}$$

$$e_n(2) = \varepsilon_{n+2} + (\phi - \theta)\varepsilon_{n+1}$$

$$Var[e_n(1)] = \sigma^2$$

$$Var[e_n(2)] = \sigma^2\,[1 + (\phi - \theta)^2]$$

$(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة تقريبية للمشاهدة y_{n+1} هي

$$(\hat{\phi} y_n - \hat{\theta}\hat{\varepsilon}_n) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} s$$

$(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة تقريبية للمشاهدة y_{n+2} هي

$$(\hat{\phi}^2 y_n - \hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\varepsilon}_n) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} s\sqrt{1+(\hat{\phi}-\hat{\theta})^2}$$

مثال (27):

اعتبر المثال(22) واوجد 95% فترة ثقة لكل مشاهدة من المــشاهدات y_{51} و y_{52} و y_{53} و y_{54} إذا كان $s^2 = 0.25$

الحــــــل:

$$(1-B)y_t = (1-0.5B+0.3B^2)\varepsilon_t$$

$$y_t = (1-B)^{-1}(1-0.5B+0.3B^2)\varepsilon_t$$

$$y_t = (1+B+B^2+\cdots)(1-0.5B+0.3B^2)\varepsilon_t$$

$$\hat{\psi}_1 = -0.5+1 = 0.5$$

$$\hat{\psi}_2 = 0.3-0.5+1 = 0.8$$

$$\hat{\psi}_3 = 0.8$$

95% فترة ثقة للمشاهدة y_{51} هي

$$\hat{y}_{50}(1) \pm 2s = 19.71 \pm 2(0.5) = (18.71, 20.71)$$

95% فترة ثقة للمشاهدة y_{52} هي

$$\hat{y}_{50}(2) \pm 2s\sqrt{1+\hat{\psi}_1^2} = 20.82 \pm 2(0.5)\sqrt{1+(0.5)^2}$$

$$= 20.82 \pm 1.12 = (19.7, 21.94)$$

95% فترة ثقة للمشاهدة y_{53} هي

$$\hat{y}_{50}(3) \pm 2s\sqrt{1+\hat{\psi}_1^2+\hat{\psi}_2^2} = 20.82 \pm 2(0.5)\sqrt{1+(0.5)^2+(0.8)^2}$$

$$= 20.82 \pm 1.375 = (19.445,22.195)$$

95% فترة ثقة للمشاهدة y_{54} هي

$$20.82 \pm 2(0.5)\sqrt{1+(0.5)^2+(0.8)^2+(0.8)^2}$$

$$= 20.82 \pm 1.59 = (19.23,22.41)$$

مثال (28):

إذا كان $y_t \sim MA(1)$ وكان $\hat{\theta}=0.5 \quad ; \quad s=0.3 \quad ; \quad \hat{\varepsilon}_n = 0.2$

أوجد فترة ثقة مناسبة لكل من المشاهدتين y_{n+1} و y_{n+2}

الحـــــل:

$$y_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

$$y_n(1) = -0.5\varepsilon_n$$

$$\hat{y}_n(1) = -0.5(0.2) = -0.1$$

$$y_n(2) = 0$$

$$\hat{\psi}_1 = -0.5 \quad ; \quad \hat{\psi}_2 = 0$$

95% فترة ثقة للمشاهدة y_{n+1}

$$-0.1 \pm 2(0.3) = (-0.7,0.5)$$

95% فترة ثقة للمشاهدة y_{n+2}

$$0 \pm 2(0.3)\sqrt{1+(-0.5)^2} = (-0.67,0.67)$$

4.5 مميزات وعيوب منهجية بوكس وجينكنز

منهجية بوكس وجينكنز هي المدخل الحقيقي للتحليل الحديث للسلاسل الزمنية والمرجعية الرئيسية للخبراء والباحثين والدارسين داخل وخارج أروقة الجامعات والمعاهد ومراكز الأبحاث والاستشارات العلمية. وقد اكتملت الركائز الرئيسية لهذه المنهجية من نظريات إحصائية وطرق عددية ووسائل بيانية وحسابية بنهاية السبعينيات من القرن العشرين. وهي نقلة نوعية متميزة وغير مسبوقة في تحليل السلاسل الزمنية، ولقد أصبحت في فترة وجيزة أكثر المنهجيات شيوعًا وتفضيلاً من قبل العاملين في هذا المجال لعدة أسباب.

السبب الأول: أنها نظام نمذجة وتنبؤ منظم وشامل وموثوق به، ويعني هذا أنها تقدم حلولاً شاملة لجميع مراحل تحليل السلاسل الزمنية بدءًا من اختيار النموذج المبدئي الملائم ومرورًا بتقدير معالم هذا النموذج وتشخيصه وأنتهاءً بالتنبؤ بالمشاهدات المستقبلية.

السبب الثاني: أن هذه المنهجية لا تفترض الاستقلال بين مشاهدات السلسلة بل الأهم من ذلك أنها تستغل بذكاء أنماط الارتباط الكامنة في البيانات المتاحة في نمذجة البيانات من خلال عائلة نماذج ARMA التي تتميز بقوتها وثراءها وقدرتها على عكس أنماط الكثير من السلاسل الزمنية التي نصادفها في التطبيقات العملية، ويؤدي هذا في النهاية إلى تنبؤات موثوق بها ومتسقة إحصائيا.

السبب الثالث: أنها تعطي تنبؤات أدق من تلك التي نحصل عليها باستخدام أي طريقة أخري خاصة إذا توافرت البيانات الكافية لتطبيقها.

السبب الرابع: أنها تعطي فترات ثقة ملاءمة للمشاهدات المستقبلية للبيانات الموسمية وغير الموسمية بينما تفشل طرق أخرى كثيرة في إعطاء مثل هذه الفترات.

والسبب الأخير: هو توافر آليات حسابية تتميز بالكفاءة العالية بالإضافة إلى توافر العديد من الحزم الإحصائية القادرة على تنفيذ جميع مراحل التحليل مثل SCA, SAS, SPSS, MINITAB, TSERIES وغيرها.

ولا تعني المميزات السابقة أن منهجية بوكس وجينكنز هي الأمثل في تحليل السلاسل الزمنية، فمثل هذه المنهجية غير موجودة حتى الآن وأظن أنها لن توجد. وربما كان هذا هو السبب في تجديد خلايا هذا المجال باستمرار بطرق أكثر حداثة. ولكن يمكن القول بأن هذا المنهجية أصبحت المرجعية الرئيسية للخبراء والباحثين والدارسين في مجال السلاسل الزمنية والتي يتم على أساسها تقويم الكثير من الدراسات الأحدث.

العيب الرئيسي الأول في هذه المنهجية أنها تحتاج في تطبيقها إلى مهارات وخبرات وشخصية من نوع خاص قد لا تتوافر لكثير من الباحثين خاصة في اختيار النموذج الملائم للبيانات جعلت البعض يعتبرها نوعًا من العلم والفن معاً.

العيب الرئيسي الثاني الذي تعاني منه هذه المنهجية أنها تتطلب على الأقل 50 مشاهدة لبناء نموذج جيد، وهذا العدد الكبير قد لا يتوافر دائمًا خاصة في حالة البيانات السنوية. ولذلك فإن هذه الطريقة يكثر استخدامها في المواقف التي يكون فيها وحدات المعاينة صغيرة مثل البيانات التي تؤخذ كل دقيقة أو تلك التي تؤخذ كل ساعة أو البيانات اليومية أو الأسبوعية أو الشهرية.

العيب الثالث الذي تعاني منه هذه المنهجية أنها تحتاج في تنفيذها إلى كم كبير من الحسابات المعقدة لا يمكن تنفيذها إلا بواسطة الكمبيوتر.

العيب الرابع لهذه المنهجية هو صعوبة تحديث النتائج عندما تتوافر بيانات جديدة، فعند توافر مشاهدة جديدة يجب تكرار كل مراحل التحليل مرة أخرى للتنبؤ بالمشاهدات

المستقبلية. ولذلك فإن استخدام هذه المنهجية عادة ما يكون أكثر تكلفة من الطرق الأخرى

وقبل أن نختتم الحديث عن هذا الباب تجدر الإشارة إلى أن منهجية بوكس وجينكنز تعاني في المنطقة العربية من نوعين من الغربة: **الغربة الأولى** هي غربة الانتشار والذي يكاد يقتصر على القليل من الباحثين داخل أروقة الجامعات ومراكز البحث العلمي. **والغربة الثانية** هي غربة الاستخدام والتطبيق واللذان يعانيان من قصور واضح خاصة إذا كان المستخدم ليس لدية الخبرة والمهارة والممارسة الكافية لتطبيق هذه المنهجية.

تمارين على الباب الرابع

1. البيانات الآتية توضح تقدير دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لإحدى السلاسل الزمنية المكونة من 120 مشاهدة.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{\rho}(k)$	0.31	-0.07	-0.07	0.11	0.08	-0.13	0.01	0.02	-0.01
$\hat{\phi}_{kk}$	0.31	0.28	0.01	0.13	-0.19	-0.05	-0.03	0.02	-0.01

a. ارسم الدالتين بيانيا مع التعليق المبدئي على كل رسم.
b. هل تعتقد بأن هذه السلسلة ساكنة؟ اشرح سبب إجابتك.
c. حدد النموذج الابتدائي المناسب لهذه السلسلة.

2. عند تحليل السلسلة الزمنية الخاصة بأرباح أحد المصانع (y_t) أتضح للباحث أنها غير ساكنة في الوسط الحسابي، وبالتالي كان لزامًا عليه أخذ الفروق الأولى (z_t). وعند تحليل السلسلة الجديدة (z_t)والتي تتكون من 98 مشاهدة حصلنا على النتائج الآتية:

$\hat{\rho}(k)$	0.62	0.51	0.41	0.38	0.30	0.12	0.01	0.01	....
$\hat{\phi}_{kk}$	0.62	0.45	0.11	-0.02	0.01	0.01	0.02	0.0	....

a. حدد نموذج ARIMA المبدئي المناسب لأرباح المصنع.

b. بعد استخدام النموذج المبدئي في التقدير حصلنا على القيم الآتية للإحصاء Q (Box – Pierce):

K	12	24	36	48
Q	10.2	16.4	18.3	21.5

هل ممكن استخدام النموذج الابتدائي في التنبؤ؟ اشرح سبب إجابتك.

3. ظهرت لدينا النتائج الآتية على شاشة الحاسب الآلي نتيجة تحليل سلسلة زمنية مكونة من 80 مشاهدة تمثل درجة الحرارة الناتجة من إحدى العمليات الكيمائية المسجلة كل دقيقة.

a c f	0.45	0.35	0.32	0.25	0.15	0.1	0.01
P a c f	0.45	0.03	0.02	0.01	0.01	0.001	0.002

حدد نموذج ARMA الملائم للسلسلة الزمنية

4. البيانات الآتية تعطي النماذج المبدئية التي تم التعرف عليها ومعاملات الارتباط الذاتي المقدرة للمتغير $w_t = (1-B)^d y_t$

	النموذج المبدئي			معاملات الارتباط الذاتي المقدرة
	P	d	q	
(a)	1	1	0	r(1) = 0.72
(b)	0	1	1	r(1) = - 0.41
(c)	1	0	1	r(1) = 0.4 ; (2) = 0.32
(d)	0	2	2	r(1) = 0.62 ; (2) = 0.13
(e)	2	1	0	r(1) = 0.93 ; (2) = 0.81

(i) اوجد التقديرات المبدئية لمعالم كل نموذج.

(ii) اكتب كل نموذج مبدئي بدلالة مؤثر الإزاحة للخلف مستخدمًا التقديرات المبدئية للمعالم.

5. الجدول الآتي يعطي النتائج الخاصة بالسلسلة الزمنية y_t والنموذج المبدئي ARIMA (0,1,1) حيث $\theta = 0 - 0.5$ وقيمة ε_0 غير معروفة

t	y_t	$\Delta y_t = z_t$	$\varepsilon_t = z_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$
0	40	-	ε_0
1	42	2	$2 - 0.5\varepsilon_0$
2	47	5	$4 + 0.25\varepsilon_0$
3	47	0	$-2 - 0.13\varepsilon_0$
4	52	5	$6 + 0.06\varepsilon_0$
5	51	-1	$-4 - 0.03\varepsilon_0$
6	57	6	$8 + 0.02\varepsilon_0$
7	59	2	

a. تأكد من صحة العموديين الأخيرين

b. اثبت أن مجموع مربعات الأخطاء الشرطي يساوي 144

6. باستخدام بيانات التمرين السابق اثبت أن قيمة ε_0 التي تجعل مجموع المربعات الشرطي $S(0.5|\varepsilon_0)$ أصغر ما يمكن هي

$$\hat{\varepsilon}_0 = \frac{(2)(0.5)+(4)(-0.25)+\cdots+(-2)(0.01)}{1^2+0.5^2+\cdots+0.01^2}$$

7. إذا كانت العملية $\{y_t\}$ تتبع نموذج AR(1) بمعلمة ϕ وكان لدينا المشاهدات الآتية:

y_t: 1 2 1 1 2

a. احسب تقدير المربعات الصغرى الشرطي للمعلمة ϕ.

b. احسب تقدير الإمكان الأكبر الشرطي للمعلمة ϕ.

c. احسب تقدير المربعات الصغرى غير الشرطي للمعلمة ϕ.

d. احسب تقدير الإمكان الأكبر غير الشرطي للمعلمة ϕ.

e. احسب تقدير تباين الاضطرابات الهادئة بجميع الطرق الممكنة.

8. إذا كانت العملية $\{y_t\}$ تتبع نموذج AR(2) احسب تقديرات المربعات الصغرى الشرطية لمعالم هذا النموذج باستخدام القيم الآتية:

y_t : 0.6 0.3 0.5 0.7 0.4 1.2 1.6 1.8 2.1 -0.1

9. إذا كانت السلسلة $\{y_t\}$ تتبع نموذج MA(1) اوجد تقدير العزوم لمعلمة هذا النموذج باستخدام البيانات الآتية:

y_t : -1.35 0.75 -0.78 -0.03 1.1 -0.65 0.85 -1.25 1.05 -0.57

10. إذا كانت العملية $\{y_t\}$ تتبع نموذج MA(1) بمعلمة θ وكان لدينا البيانات الآتية:

y_t : -1.9 1.6 0.1 -2.3

a. اثبت أن $S(0.5) \approx 8.56$

b. احسب $S(\theta)\ ;\theta = -0.9, -0.8, \cdots, 0.9$

c. اوجد تقدير المربعات الصغرى للمعلمة θ.

d. اوجد تقديرًا مناسبًا للمعلمة σ^2.

11. البيانات الآتية مولدة من عملية $MA(1)$ حيث $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$

y_t : 1.43 3.05 0.75 2.85 1.35 3.1 1.97 1.22 2.75 0.65

a. احسب $S_c(\theta)\ ;\theta = 0.1, 0.5, 0.9$ بمعلومية أن $\varepsilon_0 = 0$.

b. ارسم $S_c(\theta)$

c. اوجد تقدير المعلمة σ^2 باستخدام قيم $S_c(\theta)$ التي حسبت في (a).

12. إذا كان $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$ حيث $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$. باستخدام البيانات الآتية احسب تقدير الإمكان الأكبر للمعلمة ϕ ثم احسب البواقي $S_c(\hat{\phi}), e(\hat{\phi})$ وتقدير المعلمة σ^2.

y_t : -0.6 0.5 0.7 1.5 -1.1 -1.5 0.3 -0.3 0.4 0.9

13. في توفيق نموذج $MA(2)$ لسلسلة زمنية مكونة من 81 مشاهدة كان تقدير الإمكان الأكبر للمعلمة θ_2 هو 0.3-. كون فترة ثقة مناسبة لهذه المعلمة واختبر معنويتها.

14. في توفيق نموذج $AR(1)$ لسلسلة زمنية مكونة من 100 مشاهدة كان تقدير الإمكان الأكبر للمعلمة ϕ هو 0.2. هل يمكن القول بأن هذه السلسلة تتبع عملية اضطرابات هادئة. اشرح سبب أجابتك.

15. لكل نموذج من النماذج الآتية اوجد التنبؤات $y_t(1), y_t(2), y_t(3)$

a. $y_t - 0.7\, y_{t-1} = \varepsilon_t$

b. $(1 - B)\, y_t = \varepsilon_t - 0.6\, \varepsilon_{t-1}$

c. $(1 - 0.5\, B)\,(1 - B) = \varepsilon_t$

16. إذا كان

$$y_t = 0.6\, y_{t-1} + 0.2\, y_{t-2} + 0.3\, \varepsilon_{t-1} - 0.4\, \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

حيث

$$y_{n-1} = 5 \quad ; \quad y_n = 14 \quad ; \quad \varepsilon_{n-1} = 0.5 \quad ; \quad \varepsilon_n = 1$$

اثبت أن

(i) $y_n(1) = 3.5 \quad ; \quad y_n(2) = 2.5$

(ii) $y_n(k) = 0.6\, y_n(k-1) + 0.2\, y_n(k-2) \quad ; \quad k = 3, 4, \cdots$

17. إذا كانت العملية $\{y_t\}$ تتبع نموذج $AR(1)$ المعرف على الصورة

$$y_t = \delta + \phi\, y_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث

$$\delta = 10 \quad ; \quad \phi = 0.5 \quad ; \quad y_n = 10$$

a. احسب تنبؤي النقطة للمتغيرين، y_{n+1} ، y_{n+2}

b. احسب قيمة $\mu = E(Y_t)$.

c. احسب التنبؤات العشرة الأولى وأعرض هذه القيم بيانيًا في مقابل أفق التنبؤ وعلق على الرسم.

18. إذا كان

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad ; |\phi| < 1$$

اثبت أن أفضل تنبؤ للمتغير y_{n+k} هو الوسط الحسابي للعملية العشوائية $\{y_t\}$ عندما يؤول أفق التنبؤ k إلى مالا نهاية.

19. إذا كانت $\{y_t\}$ عملية ساكنة وكان

$$y_t = \delta + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad ; \ \delta \neq 0$$

a. اثبت أن

$$y_n(k) = \delta[1 + \phi + \phi^2 + \cdots + \phi^{k-1}] + \phi^n y_n$$

b. اثبت أن

$$\lim_{k\to\infty} y_n(k) = \mu$$

20. إذا كان

$$y_t = \mu - \theta\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

a. اثبت أن جميع تنبؤات هذه العملية ما عدا التنبؤ المستقبلي الأول تتساوي مع الوسط الحسابي للعملية.

b. إذا كان

$$\mu = 30 \quad ; \ \theta = 0.5 \quad ; \ \varepsilon_n = 2$$

اوجد

$$y_n(k) \quad ; \ k = 1, 2, 3 \cdots$$

21. إذا كان

$$y_t = \delta + \phi y_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

a.:اثبت أن

$$y_n(k) = \begin{cases} \delta + \phi\, y_n - \theta \varepsilon_n & ; \ k = 1 \\ \delta + \phi\, y_n(k-1) & ; \ k > 1 \end{cases}$$

b. إذا كان

$$\delta = 10 \ ; \ \phi = 0.5 \quad ; \ \theta = -0.5 \quad ; \ y_n = 10$$

اوجد التنبؤات الإحدى عشر الأولى. هل يوجد تشابه بين نتائج هذا التمـــرين ونتـــائج تمرين رقم (3). اشرح.

22. إذا كان

$$y_t \sim ARIMA(0,1,1)$$

اثبت أن $\psi_i = 1-\theta \;\; ; \;\; i = 1, 2, \cdots$ ثم اوجد صورة مختصرة لتباين خطأ التنبؤ لعدد k من الفترات أي $V[e_n(k)]$

23. إذا كان

$$y_n - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

اثبت أن

a. $y_n(k) = \mu + \phi^k(y_n - \mu)$

b. $Var[e_n(k)] = \sigma^2 \dfrac{1-\phi^{2k}}{1-\phi^2}$

24. إذا كان

$$(1-B)^2 y_t = (1 - 0.5B - 0.4B^2)\varepsilon_t$$

أوجد

$$y_n(k) \;\; ; \;\; k = 1, 2, \cdots$$

25. اثبت أن لأي عملية ARMA(1,q) فإن التنبؤات $y_t(1), y_t(2), \ldots, y_t(q)$ تعتمد علـــى الجـــزء الخـــاص بالمتوســـطات المتحركـــة بينمـــا التنبـــؤات $y_t(q+1), y_t(q+2), \ldots$ يمكن حسابها بالعلاقة التتابعية

$$y_t(k) = \phi y_t(k-1) \quad ; \quad k > q$$

26. إذا كان

$$y_t = 10 - 0.5\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث

$$\hat{\sigma} = 0.3 \quad ; \quad \hat{\varepsilon}_n = 5$$

a. اوجد $\hat{y}_n(2), \hat{y}_n(1)$

b. اوجد فترة ثقة (تنبؤ) لكل من y_{n+2}, y_{n+1}

27. إذا كان $y_t = 5 + 0.2\, y_{t-1} + \varepsilon_t$

حيث

$$y_n = 20 \quad ; \quad \hat{\sigma} = 0.5$$

اوجد فترة تنبؤ مناسبة لكل من y_{n+2}, y_{n+1}

28. إذا كان

$$(1 - B)y_t = \varepsilon_t - 0.5\,\varepsilon_{t-1}$$

حيث

$$\hat{\sigma} = 0.6 \quad ; \quad \hat{\varepsilon}_n = 10 \quad ; \quad y_n = 100$$

اوجد 95% فترة تنبؤ لكل من y_{n+2}, y_{n+1}

29. إذا كانت مبيعات إحدى السلع (بملايين الدولارات) يمكن تمثيلها جيدًا بواسطة النموذج

$$y_t = 0.5\, y_{t-1} + 0.2 + \varepsilon_t$$

حيث

$$\hat{\sigma}^2 = 0.4 \quad ; \quad y_{50} = 2 \text{ مليون دولار}$$

a. احسب $\hat{y}_{50}(k) = 1,2,3,\cdots$

b. اوجد فترة تنبؤ مناسبة لكل من y_{51}, y_{52}, y_{53}

30. القيم الآتية تمثل القيم $y_{61}, y_{62}, \cdots, y_{70}$ لسلسلة زمنية تم توفيقها بواسطة النموذج

$$(1-B)y_t = \varepsilon_t - 0.6\,\varepsilon_{t-1} + 0.5\,\varepsilon_{t-2}$$

20	26	26	23	18	22	25	21	22	26

a. اوجد تنبؤات المشاهدات المستقبلية الأولى والثانية والثالثة (افترض أن $\hat{\varepsilon}_{60} = \hat{\varepsilon}_{61} = 0$)

b. أوجد 80% فترة تنبؤ لكل من y_{71}, y_{72}, y_{73}

31. تمثل المشاهدات الآتية القيم $y_{91}, y_{92}, \cdots, y_{100}$ من سلسلة زمنية تم توفيقها بواسطة النموذج $\nabla y_t = \varepsilon_t - 1.1\,\varepsilon_{t-1} + 0.28\,\varepsilon_{t-2}$

166	172	172	169	164	168	171	167	168	172

a. اوجد التنبؤات $y_{100}(k)\ ;\ k = 1, 2, \cdots, 12$. افترض أن $\varepsilon_{90} = \varepsilon_{91} = 0$.

b. إذا كان $\hat{\sigma}^2 = 1.103$ احسب الانحرافات المعيارية المقدرة لأخطاء التنبؤ واستخدمها لإيجاد80% فترة تنبؤية لكل مشاهدة من المشاهدات المستقبلية $y_{101}, y_{102}, \cdots, y_{112}$. ارسم شكل بياني توضع فيه تنبؤات النقطة والفترة معًا للمشاهدات المستقبلية.

32. افترض أن البيانات في التمرين السابق تمثل المبيعات الشهرية من إحدى السلع

a. احسب تنبؤات الفصول الأربعة القادمة باستخدام البيانات حتى الزمن $t = 100$.

b. احسب 80% فترات تنبؤية لمشاهدات الفصول الأربعة القادمة.



الباب الخامس

التحليل الحديث لعدد الحجاج السنوي

□ الفحص الأولي للبيانات □ التعرف على النموذج المبدئي □
تقدير النموذج المبدئي □ تشخيص النموذج □ التنبؤ



تناولنا في الباب الثاني المفاهيم الأساسية الضرورية لفهم المنهجية الحديثة التي قدمها العالمان بوكس وجينكنز لتحليل السلاسل الزمنية. وفي الباب الثالث قدمنا العائلة الخاصة بنماذج ARMA والخصائص الإحصائية لكل منها باعتبارها مسرح الأحداث الذي احتضن منهجية بوكس وجينكنز. وفي الباب الرابع قدمنا عرضاً تفصيلياً للمراحل المختلفة التي تتكون منها هذه المنهجية فدرسنا أدوات بوكس وجينكنز الفريدة في التعرف على النموذج المبدئي الذي يلاءم البيانات وكيفية تقدير معالم هذا النموذج وكيفية استخدام مخرجات عملية التقدير في إجراء كافة الفحوص التشخيصية الضرورية لتحسين أو تطوير النموذج المبدئي واختيار نموذج يحقق التناغم بين الفروض النظرية للنموذج ومخرجات عملية التقدير، فضلاً عن ذلك فقد تناولنا في الباب الرابع أيضًا أسلوب بوكس وجينكنز في التنبؤ بالمشاهدات المستقبلية وإنشاء فترات الثقة ذات الصلة. وإيماناً منا بأن التطبيق لا ينفصل عن النظرية كان هذا الباب الأخير والذي يهدف إلى إكساب القارئ القدرة العملية على تطبيق ما جاءت به المنهجية الحديثة –التي قدمنا مفرداتها وعناصرها المختلفة في الفصول السابقة– لتحليل السلاسل الزمنية الفعلية التي تنشأ في مجالات المعرفة المختلفة . وفي الواقع أنه ليس من السهل إكساب القارئ هذه القدرة العملية من خلال تحليل سلسلة زمنية واحدة أو سلسلتين ولكن لابد من تحليل الكثير من السلاسل الزمنية الفعلية التي تنشأ في التطبيقات المختلفة التي لا يتسع المجال لذكرها هنا لأنه يتعارض من الأهداف النظرية المرجوة من هذا الكتاب. ولكن في نفس الوقت كان لابد من اختيار حالة عملية

تكون بمثابة نموذج يحتذي به عند التطبيق العملي لمنهجية بوكس وجينكنز وذلك من أجل تحقيق المقدرة العملية للقارئ ولو بشكل جزئي.

ولقد وقع الإختيار على السلسلة الخاصة بعدد الحجاج السنوي الوافدين إلى المملكة العربية السعودية في الفترة من عام 1374هـ إلى عام 1422هـ لتطبيق المراحل المختلفة للتحليل الحديث للسلاسل الزمنية. وفي الحقيقة أن هذا الإختيار له عدة أسباب أهمها:

1- أن عدد الحجاج الكلي الوافد إلى المملكة العربية السعودية يمثل أهمية خاصة للمسئولين ومتخذي القرارات بالمملكة وبالتالي فإن إيجاد نموذج حديث وكفء لوصف النمط الذي يتطور به عدد الحجاج السنوي تمهيدًا لاستخدامه في التنبؤ بحجم الحجاج الكلي في المستقبل له أهمية قصوى وذلك من أجل التخطيط الجيد لاستقبال هؤلاء الحجاج وما يلزم ذلك من تحديد التوسعات المطلوبة في الحرمين الشريفين وتحديد كمية السلع والخدمات ونوعية الرعاية الصحية التي يحتاجها الحجاج في المستقبل وذلك من أجل أداء المناسك بأمان واطمئنان.

2- صعوبة استخدام النماذج السببية لتحليل هذه البيانات نظرًا لصعوبة حصر جميع العوامل أو المتغيرات التي تؤثر على عدد الحجاج الوافدين إلى المملكة وصعوبة التنبؤ بها فضلاً عن صعوبة إدراج بعض هذه المتغيرات في النموذج مثل الوعي الديني وأحوال الطقس وغيرها من المتغيرات الوصفية التي يصعب إخضاعها للتحليل الكمي.

3- عدم استخدام منهجية بوكس وجينكنز لتحليل هذه السلسلة بالكامل من قبل الباحثين وإن كانت هناك بعض المحاولات استهدفت تحليل جزء فقط من هذه السلسلة.

4- أن نتائج تحليل هذه السلسلة على الفترة المعطاة كلها جاءت غير تقليدية إلى حد كبير – كما سنرى في هذا الباب- وتتطلب بعض الحرفية والخبرة من قبل الباحث وربما كان هذا هو السبب لعدم التعرض من قبل لتحليل هذه السلسلة بالكامل على هذه الفترة الطويلة.

5- مما لا شك فيه أن تحليل هذه السلسلة لا يهم المملكة العربية السعودية فحسب وإنما يمتد هذا الاهتمام ليشمل جميع الدول الإسلامية والتي تكون مهتمة بالكيفية التي يتطور بها عدد الحجاج زمنيًا.

وتجدر الإشارة بالقول بأن تحليل السلسلة المختارة هنا لا يهدف في المقام الأول لحل مشكلة بحثية تتعلق بعدد الحجاج السنوي بقدر ما يهدف إلى تعليم وتدريب القارئ على استخدام ما سبق دراسته من خصائص ونظريات على التعامل الفعلي مع البيانات التي تنشأ في مجالات المعرفة المختلفة، أي أن الهدف هنا هو توفيق أفضل نموذج ممكن من بين نماذج ARIMA (p, d, q) وهذا لا يمنع من إمكانية استخدام طرق أو أساليب أخرى قد تعطي نتائج أفضل. كما تجدر الإشارة بالقول بأن كل الحسابات والرسوم البيانية قد أجريت باستخدام برنامج MINITAB – Version 13.

وبصورة تفصيلية يهدف هذا الباب إلى:

- تسكين سلسلة الحجاج باستخدام التحويلات المناسبة.
- تحديد رتبة الفروق الضرورية لتحويل السلسلة إلى سلسلة ساكنة.
- التعرف على النموذج ARIMA (p, d, q) المبدئي الملائم لسلسلة الحجاج.
- تقدير معالم النموذج الذي تم التعرف عليه.
- إجراء الفحوص والاختبارات التشخيصية للنموذج المبدئي.
- إيجاد تنبؤات النقطة والفترة لعدد الحجاج لبعض السنوات التالية.

5.1 الفحص الأولي للبيانات

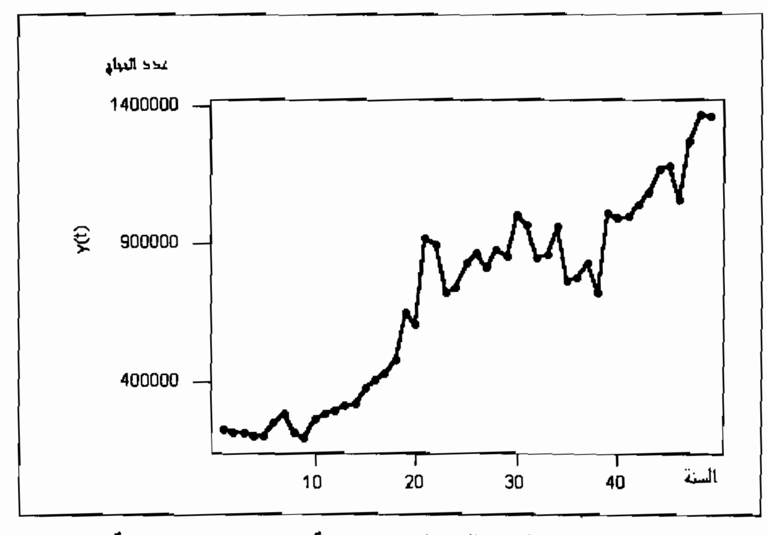
تتضمن بيانات الحجاج الوافدين إلى المملكة العربية السعودية 49 مشاهدة تمثل التطور التاريخي لعدد الحجاج من سنة 1374هـ إلى سنة 1422هـ كما هو موضح في جدول (1). وكما سبق أن ذكرنا أن الخطوة الأولى في تحليل السلاسل الزمنية هو رسم المنحنى الزمني أو التاريخي للسلسلة والذي يوضح النمط الذي يتطور به عدد الحجاج خلال الفترة موضع الدراسة وذلك من أجل التعرف على السمات والملامح

الرئيسية للسلسلة مثل الاتجاه العام والتشتت والسكون والارتباط الذاتي. ويعرض شكل (1) المنحنى الزمني لسلسلة الحجاج والذي يوضح وجود اتجاه عام بالزيادة على الفترة موضع الدراسة مما يعني أن السلسلة غير ساكنة في المتوسط الحسابي. وتعكس الزيادة في المتوسط الحسابي تأثيرات بعض العوامل الرئيسية مثل الزيادة في حجم المجتمعات الإسلامية وارتفاع مستوى معيشاتها والتوسعات في الحرمين الشريفين وتطور شبكة الطرق والمواصلات وزيادة الوعي الديني وغيرها من العوامل التي تعمل مجتمعة أو بشكل منفصل على زيادة مستوى السلسلة. كما يتضح من الفحص الدقيق للشكل (1) أن التعبير عن الاتجاه العام باستخدام إحدى الدوال المحددة غير ملائم نظرًا لوجود ارتباط ذاتي موجب واضح بين مشاهدات السلسلة والدليل على ذلك أنه إذا تصورنا خط مستقيم يتوسط البيانات وكانت إحدى المشاهدات تقع فوق الخط فإن المشاهدة التالية تميل أن تقع فوق الخط أيضًا والعكس صحيح مما يفقد تقديرات المربعات الصغرى خصائصها المثالية إذا حاولنا استخدام دالة محددة وليست عشوائية للتعبير عن الاتجاه العام. أيضًا يمكن القول بأن معدل الزيادة في عدد الحجاج قد شهد تغيرًا ملحوظًا بدءًا من عام 1392هـ وقد يكون هذا دليلاً على أن توفيق نموذج ARIMA (p, d, q) للبيانات قد يكون ملائمًا ولكنة ليس الأمثل حيث إن هناك وسائل وطرق أكثر تقدماً يمكن استخدامها لتحليل هذه البيانات ولكنها خارج موضوع هذا الكتاب. وعلي الفور نتذكر ما قلناه بأن هذا الباب لا يهدف إلى إيجاد أفضل الطرق لتحليل بيانات الحج بقدر ما يهدف إلى دراسة حالة عملية بأسلوب بوكس وجينكنز من أجل التعليم والتدريب.

جدول (1): السلسلة الزمنية لعدد الحجاج السنوي من عام 1374هـ إلى عام 1422هـ

السنة	عدد الحجاج	السنة	عدد الحجاج	السنة	عدد الحجاج
1374	232971	1391	479399	1408	762755
1375	220733	1392	645183	1409	774560
1376	215575	1393	607755	1410	827236
1377	209197	1394	918777	1411	720102
1378	207171	1395	894573	1412	1012140
1379	253369	1396	719040	1413	992813
1380	285948	1397	739319	1414	995611
1381	216455	1398	830236	1415	1042374
1382	199038	1399	862520	1416	1080465
1383	266555	1400	812892	1417	1168591
1384	283319	1401	879368	1418	1178186
1385	294118	1402	853555	1419	1056730
1386	316226	1403	1003911	1420	1267555
1387	318507	1404	969671	1421	1367792
1388	374782	1405	846097	1422	1359261
1389	406295	1406	856718		
1390	431270	1407	960386		

المصدر: الشعائر – نشرة وزارة الحج سنة 1422هـ

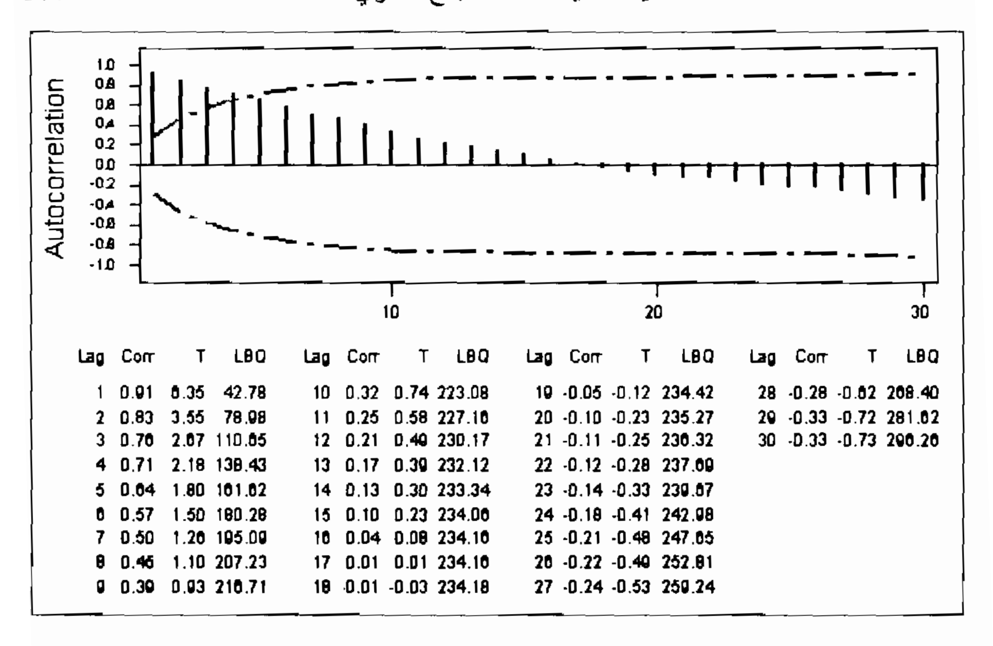


شكل (1): المنحنى الزمني لعدد الحجاج من سنة 1374هـ إلى سنة 1422هـ

وبالمزيد من الفحص الدقيق للمنحني الزمني في شكل (1) يمكن ملاحظة تغير التشتت أيضًا حول مستوى السلسلة وبذلك تكون السلسلة غير ساكنة في التباين، كما يبدو من نفس الشكل أن السلسلة لا تحتوي على مشاهدات غير عادية (شاذة). وباختصار شديد يمكن القول أن الفحص الأولي للسلسلة قد أظهر عدم سكون في خصائص السلسلة الإحصائية. وللتأكد من ذلك تم حساب دالة الارتباط الذاتي المقدرة للسلسلة ورسمها في شكل (2). وبفحص شكل (2) يلاحظ أن معاملات الارتباط الذاتي المقدرة تتلاشى ببطء أولاً إلى الصفر ولكنها سرعان ما تظهر مرة أخرى وتتزايد القيم الموجبة لها مع الزمن مما يدل على عدم سكون السلسلة الأصلية لعدد الحجاج والتي سيرمز لها بالرمز y_t. ولذلك كان لزامًا علينا تحويل هذه السلسلة غير الساكنة إلى سلسلة أخرى ساكنة. ولتسكين تباين ومتوسط السلسلة أخذت الفروق الأولى لسلسلة لوغاريتمات السلسلة y_t. فإذا رمزنا لسلسلة الفروق الأولى لسلسلة لوغاريتمات عدد الحجاج بالرمز z_t فإن

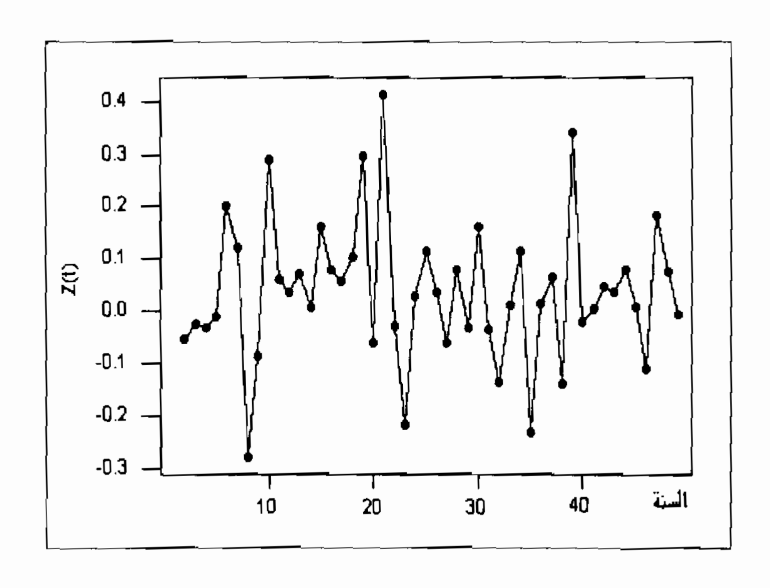
$$z_t = \log\ y_t - \log\ y_{t-1} \qquad ; t = 2, 3, \cdots n$$

وكما سبق أن ذكرنا أن أخذ الفروق الأولى للسلسلة يفقدنا إحدى المشاهدات،ولذلك فإن عدد مشاهدات z_t هو 48 مشاهدة فقط، ويعرض شكل (3) المنحنى الزمني للسلسلة z_t . وبفحص هذا الشكل يمكن القول بأن الخصائص الرئيسية للسلسلة z_t تبدو ساكنة، وتؤكد دالة الارتباط الذاتي للسلسلة والمعروضة في شكل (4) هذه الحقيقة حيث تبدو وكأنها تتلاشى بسرعة. وبذلك تكون أصغر رتبة للفروق الضرورية لتسكين السلسلة هي $d = 1$

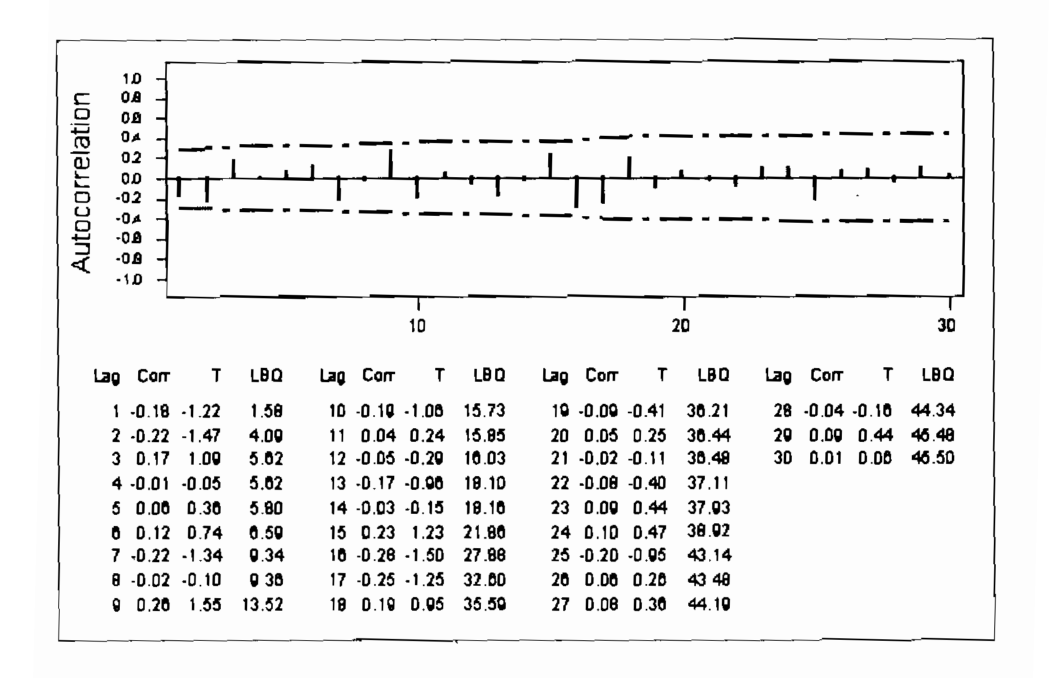


Lag	Corr	T	LBQ
1	0.91	6.35	42.78
2	0.83	3.55	78.98
3	0.76	2.67	110.65
4	0.71	2.18	138.43
5	0.64	1.80	161.62
6	0.57	1.50	180.28
7	0.50	1.26	195.09
8	0.46	1.10	207.23
9	0.39	0.93	216.71
10	0.32	0.74	223.08
11	0.25	0.58	227.16
12	0.21	0.49	230.17
13	0.17	0.39	232.12
14	0.13	0.30	233.34
15	0.10	0.23	234.06
16	0.04	0.08	234.16
17	0.01	0.01	234.16
18	-0.01	-0.03	234.18
19	-0.05	-0.12	234.42
20	-0.10	-0.23	235.27
21	-0.11	-0.25	236.32
22	-0.12	-0.28	237.69
23	-0.14	-0.33	239.67
24	-0.18	-0.41	242.98
25	-0.21	-0.48	247.65
26	-0.22	-0.49	252.81
27	-0.24	-0.53	259.24
28	-0.28	-0.62	268.40
29	-0.33	-0.72	281.62
30	-0.33	-0.73	290.26

شكل (2): دالة الارتباط الذاتي لعدد الحجاج السنوي (y_t)



شكل (3): المنحنى الزمني للفروق الأولى لسلسلة لوغاريتمات عدد الحجاج (z_t)



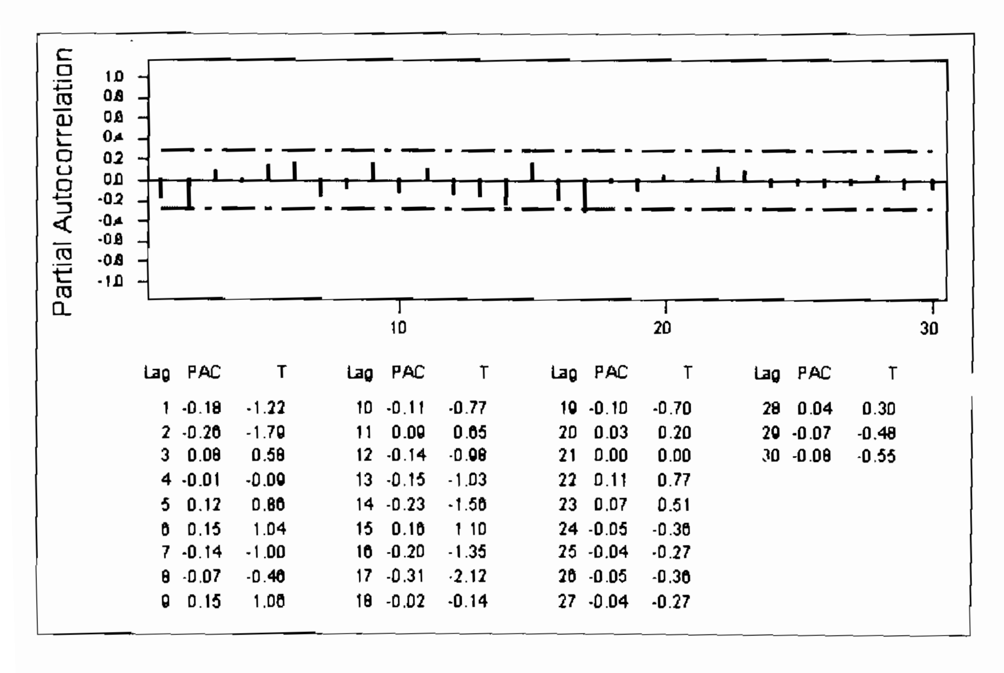
Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	-0.18	-1.22	1.58	10	-0.19	-1.06	15.73	19	-0.09	-0.41	36.21	28	-0.04	-0.16	44.34
2	-0.22	-1.47	4.09	11	0.04	0.24	15.85	20	0.05	0.25	36.44	29	0.09	0.44	46.48
3	0.17	1.09	5.62	12	-0.05	-0.29	16.03	21	-0.02	-0.11	36.48	30	0.01	0.06	46.50
4	-0.01	-0.05	5.62	13	-0.17	-0.96	18.10	22	-0.08	-0.40	37.11				
5	0.06	0.36	5.80	14	-0.03	-0.15	18.16	23	0.09	0.44	37.93				
6	0.12	0.74	6.59	15	0.23	1.23	21.86	24	0.10	0.47	38.92				
7	-0.22	-1.34	9.34	16	-0.28	-1.50	27.88	25	-0.20	-0.95	43.14				
8	-0.02	-0.10	9.36	17	-0.25	-1.25	32.80	26	0.06	0.26	43.48				
9	0.26	1.55	13.52	18	0.19	0.95	35.59	27	0.08	0.36	44.19				

شكل (4): دالة الارتباط الذاتي المقدرة للسلسلة (z_t)

5.2 التعرف على النموذج المبدئي

بعد تحديد أصغر رتبة فروق يمكن أن يحقق سكون السلسلة تأتي مرحلة التعرف على رتبة الجزء الخاص بالإنحدار الذاتي والمعروفة بالرمز p ورتبة الجزء الخاص بالمتوسطات المتحركة والمعروفة بالرمز q. وكما نعلم أن منهجية بوكس وجينكنز تعتمد في تقدير هاتين الرتبتين على أداتين أساسيتين هما دالة الارتباط الذاتي المقدرة للسلسلة z_t والتي رمزنا لها في الباب الثاني بالرمز $r(k)$ ودالة الارتباط الذاتي الجزئي المقدرة لها والتي رمزنا لها في نفس الباب بالرمز $\hat{\phi}_{kk}$، ويوضح الشكلان (4) ، (5) دالتي الارتباط الذاتي المقدرتين للسلسلة z_t. وبفحص دالة الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي قد يعتقد الباحث الذي لا يتمتع بالخبرة الكافية أن جميع معاملات الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لا يختلف أي منها معنويًا عن الصفر حيث تبدو القيم الموجبة لمعاملات الارتباط بنوعيها أقل من ضعف الخطأ المعياري، ولكن

الباحث المتمرس والذي يمتلك الخبرة الكافية لا يمكنه قبول مثـل هـذه الاسـتدلالات خاصة عند الفجوات الزمنية الصغيرة، فاختبارات الفروض الإحـصائية عنـد هـذه الفجوات عادة ما تجرى عند مستوى معنوية كبير نسبيًا مثل 10% أو15% أو حتـى 20% بينما تجرى الاختبارات عند الفجوات الزمنية الكبيرة عند مستوى صغير نـسبيًا عادة ما يكون5% أو 10%. والسبب في ذلك ليس نظريًا بقدر ما هو تطبيقًا ويعزى إلى الخبرات العملية التي تكتسب يومًا بعد يوم بالتعامل مع المزيد من البيانات الفعلية التي تنشأ في جميع مجالات المعرفة المختلفة. ففي مثل هذه التطبيقات عادة ما نميـل في البداية إلى رفض الفرض العدمي حتي نحصل على معامل (أو معاملين) يختلـف (أو يختلفا) معنويًا عن الصفر ثم نكون أكثر تشددًا في قبول المزيد مـن المعـاملات الأخرى.



Lag	PAC	T	Lag	PAC	T	Lag	PAC	T	Lag	PAC	T
1	-0.18	-1.22	10	-0.11	-0.77	19	-0.10	-0.70	28	0.04	0.30
2	-0.26	-1.79	11	0.09	0.65	20	0.03	0.20	29	-0.07	-0.48
3	0.08	0.58	12	-0.14	-0.98	21	0.00	0.00	30	-0.08	-0.55
4	-0.01	-0.09	13	-0.15	-1.03	22	0.11	0.77			
5	0.12	0.86	14	-0.23	-1.58	23	0.07	0.51			
6	0.15	1.04	15	0.16	1.10	24	-0.05	-0.36			
7	-0.14	-1.00	16	-0.20	-1.35	25	-0.04	-0.27			
8	-0.07	-0.48	17	-0.31	-2.12	26	-0.05	-0.36			
9	0.15	1.06	18	-0.02	-0.14	27	-0.04	-0.27			

شكل (5): دالة الارتباط الذاتي الجزئي المقدرة للسلسلة (z_t)

وبتحكيم هذا المنطق التطبيقي وبعد الفحص البصري لـدالتي الارتبـاط الـذاتي فـي الشكلين (4) و (5) تبدو دالة الارتباط الجزئي في الشكل (5) وكأنها تنقطع بوضـوح

بعد الفجوة الزمنية الثانية حيث يبدو معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية الثانية وكأنه يختلف معنويًا عن الصفر عند مستوى معنوية أكبر من أو يساوي 10% بينما يبدو كل معامل ارتباط ذاتي جزئي بعد الفجوة الزمنية الثانية وكأنــه لا يختلــف معنويًا عن الصفر عند مستوى معنوية5% أو 10% ربما باستثناء معامــل الارتبــاط الذاتي الجزئي الوحيد عند الفجوة الزمنية السابعة عشر والذي يمكن إهماله لأنه معامل وحيد ويحدث عند فجوة زمنية بعيدة.

أما بخصوص دالة الارتباط الذاتي في الشكل(4) فمن الصعب إهمال كــل معــاملات الارتباط بعد الفجوة الزمنية الثانية خاصة معاملي الارتباط عند الفجــوتين الــزمنيتين السابعة والتاسعة، ومن ثم يمكن اعتبار دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ للعملية العــشوائية التي ولدت البيانات وكأنها تتلاشى تدريجيًا ولا تنقطع فجأة بعد فجوة زمنية صــغيرة. وقد يكون هذا دليلاً ملائمًا على أن العملية العشوائية z_t تتبع نموذج ARMA (2 , 0). وللتأكد من ذلك يجب أولاً اختبار الفرض الإحصائي الآتي

$$H_0 : \phi_{22} = 0 \quad ; \quad H_1 : \phi_{22} \neq 0$$

بافتراض أن العملية العشوائية النظرية تتبع نموذج(1) AR. ويمكن إجراء هذا الاختبار بسهولة بحساب الخطأ المعياري المقدر لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي عنــد الفجــوة الزمنية الثالثة كما يلي

$$SE \ [\hat{\phi}_{22}] \approx \frac{1}{\sqrt{n-1}} \approx \frac{1}{\sqrt{48}}$$

$$\approx 0.144$$

ومن ثم يكون الإحصاء Z كما يلي

$$|Z| = |\hat{\phi}_{22}| / SE[\hat{\phi}_{22}]$$

$$= 0.26 / 0.144 = 1.81 > 1.64$$

ومن ثم يمكن الاستدلال على أن معامل الارتباط ϕ_{22}يختلف معنويًا عن الصفر بمستوى معنوية 10%. ويمكن الآن إجراء معنوية كل معاملات الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} لكل قيم $k = 3, 4, 5,...$ بافتراض أن العملية العشوائية تتبع النموذج AR (2) بمقارنة القيمة الموجبة لكل معامل ارتباط ذاتي جزئي مقدر بضعف الخطأ المعياري والذي يساوي دائمًا 0.288. بفحص معاملات الارتباط الذاتي الجزئي المقدرة نجد أن $0.288 > |\phi_{kk}|$ لكل قيم $k = 3, 4,... 16, 18,...$ أي باستثناء معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية السابعة عشرة. والخلاصة يمكن القول بأنه ليس هناك سبب أو دليل قوي على أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي لا تنقطع بعد الفجوة الزمنية الثانية مما يؤيد إمكانية استخدام النموذج AR (2) أو ARMA (2, 0) لوصف نمط السلسلة الزمنية z_t ومن ثم استخدام النموذج ARIMA (2, 1,0) لوصف نمط السلسلة $\log y_t$ خاصة أنه يمكن اعتبار أن دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ تتلاشى تدريجياً إلى الصفر. وبذلك يمكن كتابة النموذج المبدئي للسلسلة z_t على الصورة

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)z_t = \delta+\varepsilon_t \qquad (5.2.1)$$

وبالتعويض في (5.2.1) عن

$$z_t = \log\ y_t - \log\ y_{t-1}$$

يمكن كتابة النموذج المبدئي الملائم بدلالة سلسلة اللوغاريتمات على الصورة

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)\ \ (\log y_t - \log y_{t-1}) = \delta+\varepsilon_t \qquad (5.2.2)$$

وبعد الفحص الدقيق لدالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي المقدرتين وتحليل نتائج اختبارات الفروض ذات الصلة نقترح النموذج AR (2) للسلسلة الزمنية z_t للمزيد من الفحص والدراسة، وهذا النموذج يعادل القول بأن السلسلة $\log y_t$ تتبع نموذج ARMA(2,1,0).

5.3 تقدير النموذج المبدئي

بعد اختيار النموذج المبدئي الملائم يجب تقدير معلماتـــه تمهيـدًا لتشخيـصه واستخدامه في التنبؤ بعدد الحجاج الوافدين إلى المملكة العربية السعودية في المستقبل. ويتضمن جدول (2) المخرجات الأساسية لتوفيق النموذج ARIMA (2, 1, 0) – الـذي تم اختياره– لسلسلة لوغاريتمات السلسلة الأصلية y_t. ويحتوي الجدول على تقـديرات المعالم لهذا النموذج والأخطاء المعيارية المقدرة لها وقيم الإحصاء T– والذي أشـرنا إليه في الكتاب بالرمز Z –والتي تستخدم لاختبار معنويات المعـالم المنـاظرة عنـد مقارنتها بالقيم الجدولية المناسبة. فضلاً عن ذلك يحتوي الجدول على قيم P المحسوبة والتي تستخدم مباشرة لاختبار معنوية المعاملات بمقارنتها بمستوى المعنوية المناسب. وبفحص قيم P المختلفة يمكن الاستدلال على اختلاف المعلمة الحقيقية ϕ_2 معنويًا عن الصفر إذا كان مستوى المعنوية أكبر من 7.5% وعلي اختلاف الحد الثابت δ عـن الصفر إذا كان مستوى المعنوية أكبر 1% .كما يمكن الاستدلال على اختلاف المعلمة ϕ_1 معنويًا عن الصفر إذا كان مستوى المعنوية أكبر من 12.5% وعلى ذلـك يكـون تقدير النموذج بعد التعويض من الجدول (2) في (5.2.2) كالآتي

$$(1+0.2265\ B+0.2647\ B^2)\ \ (\log y_t - \log y_{t-1}) = 0.024454 + \varepsilon_t \qquad (5.3.1)$$

بالإضافة إلى التقديرات السابق ذكرها يحتوي جدول (2) علـى بعـض المخرجـات الأخرى مثل تقدير تباين الأخطاء والمشار إليه بالرمز MS ويساوي 0.003294 وقيم إحصاء بوكس وبيرس المعدل (Ljung – Box) عند الفجوات الزمنيـة k = 12. 24, 36, 48 والتي تستخدم في تشخيص النموذج كما سنرى فيما بعد.

جدول (2): تقدير النموذج لسلسلة لوغاريتمات عدد الحجاج (z_t)

ARIMA model for log Y (t)				
Estimates at each iteration				
Iteration	SSE	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\delta}$
0	0.494314	0.100	0.100	0.093
1	0.160674	-0.041	-0.050	0.023
2	0.149502	-0.171	-0.200	0.022
3	0.148540	-0.222	-0.259	0.024
4	0.148532	-0.226	-0.264	03024
5	0.148532	-0.226	-0.265	0.024
6	0.148532	-0.226	-0.265	0.024
Relative change in each estimate less than 0.0010				
Final Estimates of parameters				
Type	Coef	Se Coef	T	P
AR (1)	-0.2265	0.1438	-1.58	0.122
AR (2)	-0.2647	0.1439	-1.84	0.072
Constant	0.024454	0.008289	2.95	0.005
Differencing: 1 regular difference				
Number of observations: Original series 49, after differencing 48				
Residuals: SS = 0.148208 (back forecasts excluded) MS = 0.003294 DF = 45				
Modified Box-Pierce (Ljung-Box)Chi-Square Statistic				
Lag	12	24	36	48
Chi-Square	8.8	28.3	35.8	*
DF	9	21	33	*
P-Value	0.445	0.131	0.340	*

5.4 تشخيص النموذج

بمجرد التعرف على النموذج (أو النماذج) المبدئي الملائم وتقدير معالمه يجب فحص ملاءمة فروض هذا النموذج النظرية لبيانات السلسلة الزمنية المرصودة وذلك بغرض تحسينه أو تطويره أو الإبقاء عليه كما هو إذا كانت الفروض النظرية ملاءمة. وهذه المرحلة كما سبق أن ذكرنا من أهم وأخطر مراحل التحليل الحديث والتي تحتاج

دائمًا إلى صبر ومجهود شاق من الباحث حتى يطمئن على ملائمة النموذج ومن ثم إمكانية استخدامه في التنبؤ المستقبلي. وقد أجريت أربعة فحوص رئيسية لتقويم النموذج شملت تحليل السكون وتحليل البواقي وإمكانية إضافة بعض المعالم إلى النموذج وإمكانية حذف بعض المعالم من النموذج. أما الفحص الخاص بتحليل الانعكاس فليس ذو صلة حيث أن نموذج ARMA (2, 0) منعكس دائماً بغض النظر عن قيم المعالم. ونعرض فيما يلي نتائج هذه الفحوص بشيء من التفصيل.

5.4.1 تحليل السكون

ذكرنا في الباب الثالث أن شروط سكون النموذج ARMA (2,0) هي

(i) $\phi_1 + \phi_2 < 1$

(ii) $\phi_2 - \phi_1 < 1$

(iii) $|\phi_2| < 1$

وبالتعويض عن $\phi_1 = -0.2265 \;\; ; \;\; \phi_2 = -0.2647$ في هذه الشروط وهي التقديرات التي حصلنا عليها في مرحلة التقدير – نجد أن

(i) $\phi_1 + \phi_2 = -0.4912 < 1$

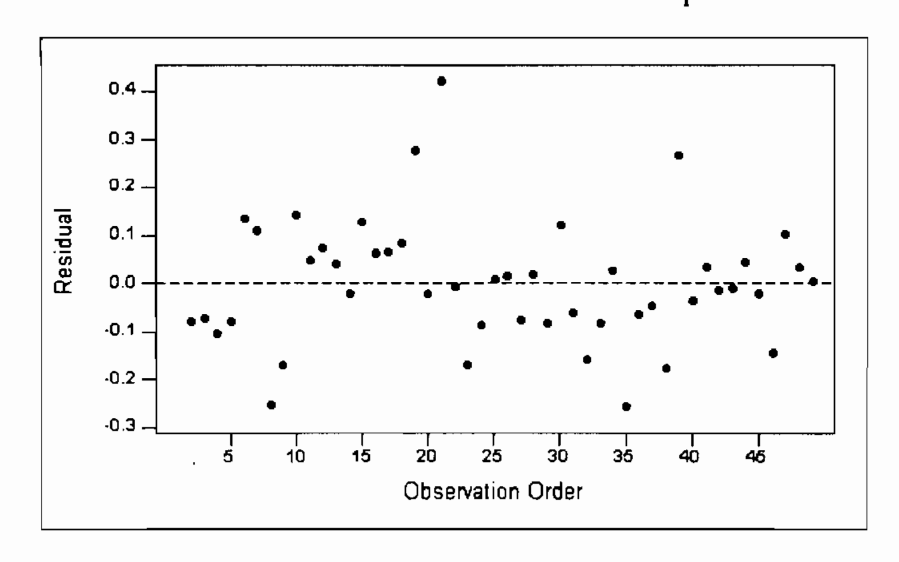
(ii) $\phi_2 - \phi_1 = -0.0382 < 1$

(iii) $|\phi_2| = 0.2647 < 1$

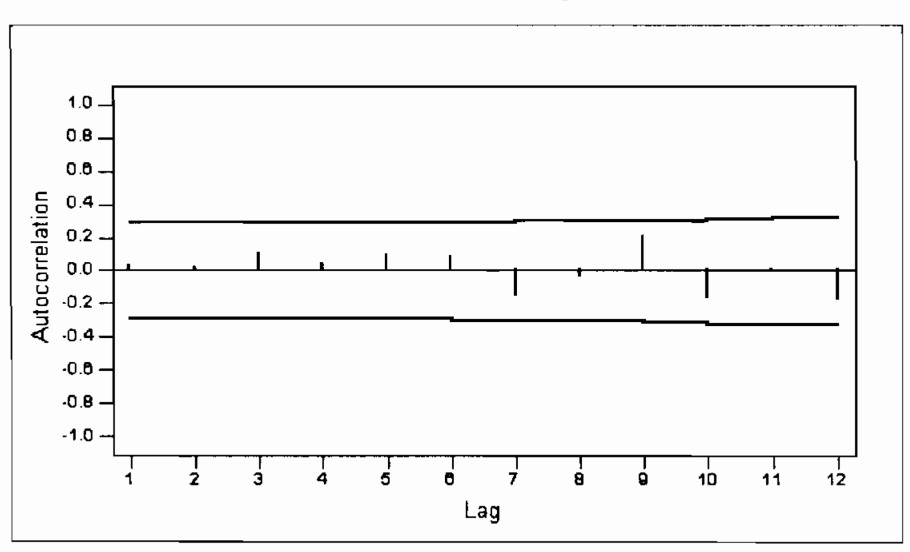
ويعني هذا أن تقديرات المعالم للنموذج الذي بين أيدينا تحقق شروط السكون

5.4.2 تحليل البواقي

إذا كان النموذج ARIMA (2, 1, 0) يمثل بالفعل حقيقة العملية التي ولدت البيانات فإن البواقي e_t التي تنتج من توفيق هذا النموذج يجب أن تتوافق مع الفروض النظرية الخاصة بالمتغيرات العشوائية ε_t والتي سبق الحديث عنها في الفصول السابقة. ويضم تحليل البواقي مجموعة كبيرة من الفحوص والإختبارات التشخيصية أهمها رسم البواقي وفحص دالة الارتباط الذاتي واختبار بوكس وبيرس المعدل وفحص نموذج الفروق الأولى للبواقي. ويعرض الشكل (6) رسم البواقي والذي يبدو خاليًا من جميع الأنماط والتحركات المنتظمة التي يمكن أن تستخدم لتحسين النموذج، فالبيانات تتأرجح بشكل عشوائي حول خط الصفر. ويؤكد رسم دالة الارتباط الذاتي للبواقي والمعروض في الشكل (7) هذه الحقيقة إلى حد كبير حيث يقع كل معامل ارتباط ذاتي للبواقي داخل فترة الثقة للعينات الكبيرة، أي أن شكل دالة الارتباط الذاتي للبواقي خالية من النتوءات وهذا مؤشر جيد أخر على أن الأخطاء ε_t تمثل تغيرات عشوائية بحتة pure random errors

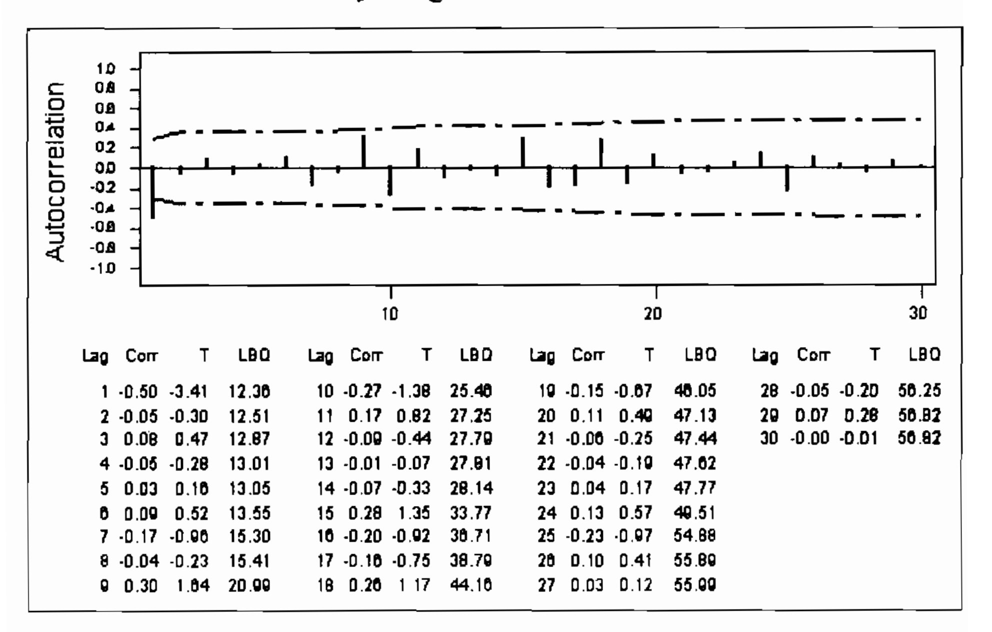


شكل (6): رسم بواقي النموذج ARIMA (2, 1, 0)



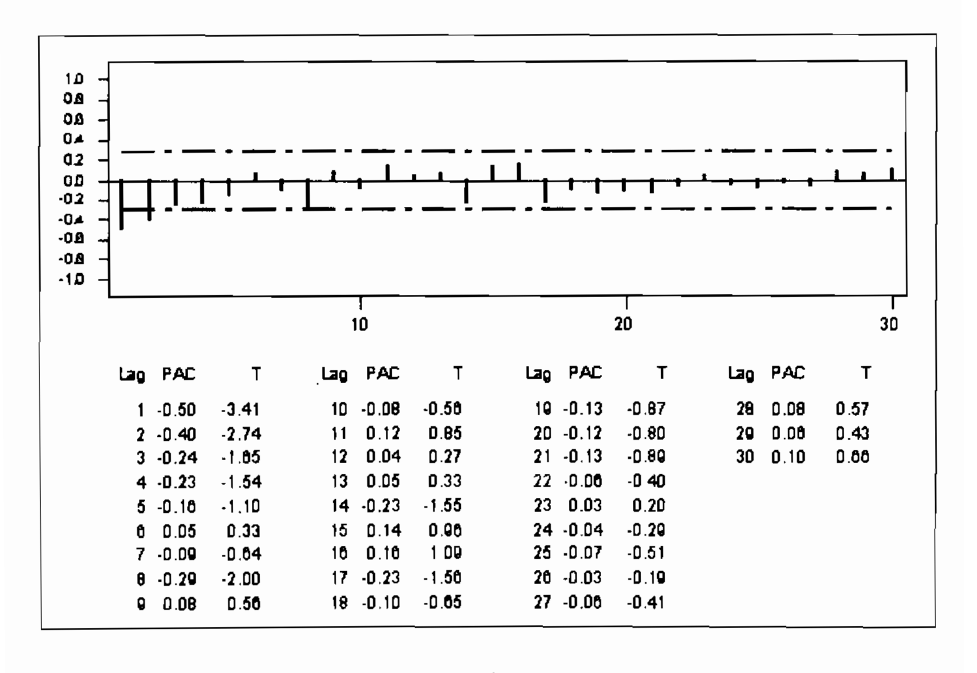
شكل (7): دالة الارتباط الذاتي لبواقي النموذج ARIMA (2, 1, 0)

وبفحص قيم إحصاء بوكس وبيرس المعدل في جدول (2) نجد أن قيم P المناظرة للفجوات k = 12, 24, 36, 48 كلها كبيرة نسبيًا، فعند k = 12 نجد أن قيمة P المناظرة لهذا الإحصاء تساوي 0.455 وهذا يدل على وجود نمط عشوائي جماعي في أول 12 معامل ارتباط ذاتي للأخطاء، وبالمثل تدل قيمة P المناظرة لهذا المقياس عند k = 24 على وجود نمط عشوائي جماعي في أول 24 معامل ارتباط ذاتي للأخطاء،.... وهكذا. وهذه المؤشرات من أهم المؤشرات على ملاءمة فروض النموذج الذي تم توفيقه. أما بخصوص نموذج الفروق الأولى للبواقي Δe_t فإنه بفحص شكل (8) والذي يمثل دالة الارتباط الذاتي المقدرة للفروق الأولى للبواقي وشكل (9) والذي يمثل دالة الارتباط الذاتي الجزئي المقدرة للفروق الأولى للبواقي يمكن الاستدلال بسهولة على أن النموذج الملائم لسلسلة الفروق الأولى هو بالفعل نموذج MA(1) حيث تبدو دالة الارتباط الذاتي وكأنها تنقطع فجأة بعد الفجوة الزمنية الأولى بينما تتلاشى دالة الارتباط الذاتي الجزئي تدريجيًا إلى الصفر.



Lag	Corr	T	LBQ
1	-0.50	-3.41	12.36
2	-0.05	-0.30	12.51
3	0.08	0.47	12.87
4	-0.05	-0.28	13.01
5	0.03	0.16	13.05
6	0.09	0.52	13.55
7	-0.17	-0.86	15.30
8	-0.04	-0.23	15.41
9	0.30	1.64	20.99
10	-0.27	-1.38	25.46
11	0.17	0.82	27.25
12	-0.09	-0.44	27.79
13	-0.01	-0.07	27.81
14	-0.07	-0.33	28.14
15	0.28	1.35	33.77
16	-0.20	-0.92	36.71
17	-0.16	-0.75	38.79
18	0.26	1 17	44.16
19	-0.15	-0.67	46.05
20	0.11	0.49	47.13
21	-0.06	-0.25	47.44
22	-0.04	-0.19	47.62
23	0.04	0.17	47.77
24	0.13	0.57	49.51
25	-0.23	-0.97	54.88
26	0.10	0.41	55.89
27	0.03	0.12	55.99
28	-0.05	-0.20	56.25
29	0.07	0.28	56.82
30	-0.00	-0.01	56.82

شكل (8): دالة الارتباط الذاتي للفروق الأولى لبواقي النموذج ARIMA (2,1,0)



Lag	PAC	T
1	-0.50	-3.41
2	-0.40	-2.74
3	-0.24	-1.65
4	-0.23	-1.54
5	-0.16	-1.10
6	0.05	0.33
7	-0.09	-0.64
8	-0.29	-2.00
9	0.08	0.56
10	-0.08	-0.56
11	0.12	0.85
12	0.04	0.27
13	0.05	0.33
14	-0.23	-1.55
15	0.14	0.96
16	0.16	1 09
17	-0.23	-1.56
18	-0.10	-0.65
19	-0.13	-0.87
20	-0.12	-0.80
21	-0.13	-0.89
22	-0.06	-0 40
23	0.03	0.20
24	-0.04	-0.29
25	-0.07	-0.51
26	-0.03	-0.19
27	-0.06	-0.41
28	0.08	0.57
29	0.06	0.43
30	0.10	0.66

شكل (9): دالة الارتباط الذاتي الجزئي للفروق الأولى لبواقي النموذج النموذج ARIMA (2, 1, 0)

ويعرض جدول (3) مخرجات توفيق النموذج MA (1) لسلسلة الفروق الأولى للبواقي أي السلسلة Δe_t حيث نجد أن تقدير معلمة هذا النمـــوذج هـــو $\hat{\theta} = 0.9793$. ولاختبار أن قيمة المعلمة θ المناظرة لهذا التقدير لا تختلف معنويًا عن الواحد الصحيح نجري الاختبار الإحصائي الآتي

$$H_0 : \theta = 1 \quad ; \; H_1 : \theta \neq 1$$

ولإجراء هذا الاختبار نستخدم الإحصاء

$$|Z| = \left| \frac{\hat{\theta} - 1}{SE(\hat{\theta})} \right|$$

$$= \left| \frac{0.9793 - 1}{0.0509} \right| = 0.41$$

وبمقارنة هذه القيمة بالقيمة الجدولية 2 والتي نحصل عليها من جداول التوزيع المعتاد القياسي عند مستوى المعنوية 5% يمكن الاستدلال على أن معلمة النموذج الحقيقية θ لا تختلف عن الواحد الصحيح. فضلاً عن ذلك نجد أن قيم P المناظرة لإحصاء بوكس وبيرس المعدل تؤيد ملاءمة هذا النموذج. وباختصار يمكن الاستدلال على أن النموذج الملائم لسلسلة الفروق الأولى للبواقي الناتجة من توفيق النمـــوذج (2,1,0) ARIMA لسلسلة لوغاريتمات عدد الحجاج هو نموذج MA(1) بمعلمة لا تختلف معنويًـــا عـــن الواحد الصحيح، وهذا مؤشرًا أخر على أن الأخطاء ε_t تمثل تغيرات عشوائية بحتة

جدول (3): تقدير النموذج (1) MA لسلسلة فروق البواقي

ARIMA model for D.RESI.				
Estimates at each iteration				
Iteration	**SSE**	$\hat{\theta}_1$		
0	0.261943	0.100		
1	0.229712	0.250		
2	0.203923	0.400		
3	0.183224	0.550		
4	0.137417	0.700		
5	0.158084	0.850		
6	0.156660	0.888		
7	0.155489	0.916		
8	0.153849	0.946		
9	0.151536	0.979		
Unable to reduce sum of squares any further				
Final Estimates of parameters				
Type	**Coef**	**Se Coef**	**T**	**P**
MA (1)	0.9793	0.0509	19.26	0.000
Number of observations: 47				
Residuals: SS = 0.149963 (back forecasts excluded) **MS = 0.003260 DF = 46**				
Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square Statistic				
Lag	12	24	36	48
Chi-Square	9.1	28.7	34.7	*
DF	11	23	35	*
P-Value	0.616	0.269	0.484	*

والخلاصة أن نتائج جميع الاختبارات والفحوص التشخيصية التـــي أجريـــت تحت مظلة تحليل البواقي الناتجة من مخرجات توفيـــق النمـــوذج (2,1,0) ARIMA

للبيانات جاءت متفقة إلى حد كبير مع الفروض النظرية التي يعتمد عليها هذا النموذج مما يزيد الثقة في كفاءة هذا النموذج في تحليل بيانات الحج.

5.4.3 توفيق النموذج الأدنى مباشرة

كما سبق أن ذكرنا في الباب الرابع أن الاختبارات ذات الصلة بتوفيق النموذج الأدنى تهدف إلى الإجابة عن السؤال الأتي: هل النموذج المبـدئي ARIMA (2,1,0) يتضمن معالم أكثر مما يجب؟ ولقد تم بالفعل حذف معلمة الإنحدار الذاتي الثانية ϕ_2 من النموذج وتوفيق النموذج الأدنى مباشرة ARIMA (1, 1, 0) وعرض النتائج في جدول (4). وبفحص نتائج هذا الجدول يمكن ملاحظة أن القيمة الموجبة للتقدير ϕ_1 قد انخفضت من 0.2265 إلى 0.1781 بعد حذف المعلمة ϕ_2 من النموذج أي انخفضت بنسبة 22.8% تقريبًا، ويدل ذلك على ضعف درجة الارتباط بين المقدر $\hat{\phi}_2$ والمقدر $\hat{\phi}_1$ ومن ثم فإن وجود ϕ_1 في النموذج لا يغني عن وجود ϕ_2، بالإضافة إلى ذلك فإن قيم P المناظرة لإحصاء بوكس وبيرس المعدل لا تؤيد ملاءمة النموذج ARIMA (1, 1, 0)، وهذا يعني فشل النموذج الأدنى في أن يكون بديلاً ملاءمًا للنموذج ARIMA (2, 1, 0)

جدول (4): تقدير النموذج ARIMA (1,1,0) لسلسلة لوغاريتمات عدد الحجاج (z_t)
(Underfitting)

ARIMA model for log y(t)			
Estimates at each iteration			
Iteration	**SSE**	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\delta}_1$
0	0.563714	0.100	0.104
1	0.192566	-0.050	0.042
2	0.159667	-0.172	0.17
3	0.159491	-0.177	0.019
4	0.159491	-0.178	0.019
5	0.159491	-0.178	0.019
Relative change in each estimate less than 0.0010			
Final Estimates of parameters			

Type	Coef	Se Coef	T	P
AR (1)	-0.1781	.01452	-1.23	0.226
Constant	0.019016	0.008498	2.24	0.030
Differencing: 1 reqular difference Number of observations: Original series 49, after Differencing 48				
Residuals: SS = 0.159442 (back forecasts excluded) MS = 0.003466 DF = 46				
Modified Box-Pierce (Ljung-Box)Chi-Square Statistic				
Lag	12	24	36	48
Chi-Square	12.9	35.3	45.9	*
DF	10	22	34	*
P-Value	0.231	0.036	0.083	*

5.4.4 توفيق النموذج الأعلى مباشرة

كما سبق أن ذكرنا في الباب الرابع أن الاختبارات الخاصة بتوفيق النموذج الأعلى تهدف إلى الإجابة عن السؤال الآتي: هل عدد المعالم التي يتضمنها النموذج ARIMA (2, 1, 0) أقل مما يجب؟ وللإجابة على هذا السؤال تم أولاً إضافة معلمة انحدار ذاتي ثالثة ϕ_3 وتوفيق النموذج الأعلى مباشرة ARIMA (3, 1,0) لسلسلة لوغاريتمات عدد الحجاج، ويعرض جدول (5) مخرجات عملية التقدير لهذا النموذج. وبفحص نتائج هذا الجدول نجد أن تقدير المعلمة المضافة $\hat{\phi}_3$ يساوي0.0816 وأن قيمة P المناظرة تساوي 0.595 مما يدل على أن المعلمة لا تختلف معنويًا عن الصفر ومن ثم لابد من حذفها من النموذج. وبالمثل أضيفت معلمة متوسطات متحركة أولى θ_1 إلى النموذج وتم توفيق النموذج الأعلىARIMA (2,1,1)، ويعرض جدول (6) مخرجات توفيق هذا النموذج. وبفحص نتائج هذا الجدول نجد أن تقدير معلمة المتوسطات المتحركة $\hat{\theta}_1$ يساوي0.328- وأن قيمةP المناظرة تساوي0.514 مما يدل على أن قيمة المعلمة الحقيقية θ_1 لا تختلف معنويًا عن الصفر ويجب حذفها من النموذج. والخلاصة أن إضافة معلمة إلى النموذج ARIMA (2,1,0) لا يؤدي إلى تحسينه بل ينقص من كفاءته ويزيده تعقيدًا بدون مبررات منطقية.

جدول (5): تقدير النموذج ARIMA (3,1,0) لسلسلة لوغاريتمات عدد الحجاج (z_t) (Overfitting)

ARIMA model for log y(t).					
Estimates at each iteration					
Iteration	**SSE**	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\phi}_3$	$\hat{\delta}$
0	0.420791	0.100	0.100	0.100	0.081
1	0.157067	-0.033	-0.050	0.146	0.020
2	0.148149	-0.165	-0.200	0.103	0.019
3	0.147609	-0.200	-0.239	0.087	0.022
4	0.147601	-0.204	-0.244	0.082	0.022
5	0.147601	-0.205	-0.245	0.082	0.022
6	0.147601	-0.205	-0.245	0.082	0.022
7	0.147601	-0.205	-0.245	0.082	0.022

Relative change in each estimate less than 0.0010

Final Estimates of parameters

Type	Coef	Se Coef	T	P
AR (1)	-0.2048	0.1502	-1.36	0.180
AR (2)	-0.2449	0.1493	-1.64	0.108
AR (3)	0.0816	0.1524	0.54	0.595
Constant	0.022375	0.008357	2.68	0.010

Differencing: 1 regular difference

Number of observations: Original series 49, after Differencing 48

Residuals: SS = 0.147409 (backforecasts excluded)
MS = 0.003350 DF = 44

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square Statistic

Lag	12	24	36	48
Chi-Square	9.0	26.8	34.4	*
DF	8	20	32	*
P-Value	0.347	0.142	0.354	*

جدول (6): تقدير النموذج ARIMA (2,1,1) لسلسة لوغاريتمات عدد الحجاج (z_t)
(Overfitting)

ARIMA model for log y(t).

Estimates at each iteration

Iteration	SSE	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\delta}$
0	0.557574	0.100	0.100	0.100	0.093
1	0.423908	0.222	0.056	0.250	0.066
2	0.386373	0.360	0.044	0.400	0.050
3	0.369188	0.503	0.042	0.550	0.037
4	0.356736	0.648	0.045	0.700	0.024
5	0.344954	0.792	0.051	0.850	0.012
6	0.330328	0.642	0.044	0.705	0.023
7	0.316066	0.492	0.034	0.560	0.033
8	0.312723	0.342	0.023	0.411	0.043
9	0.309990	0.192	0.011	0.262	0.054
10	0.306666	0.042	-0.001	0.114	0.064
11	0.301647	-0.108	-0.015	-0.034	0.074
12	0.292810	-0.258	-0.032	-0.181	0.083
13	0.272616	0.408	-0.060	-0.323	0.088
14	0.158673	-0.482	-0.210	-0.329	0.046
15	0.147442	-0.515	-0.311	-0.316	0.029
16	0.147413	-0.530	-0.317	-0.329	0.030
17	0.147413	-0.529	-0.317	-0.328	0.030
18	0.147413	-0.529	-0.317	-0.328	0.030

Relative change in each estimate less than 0.0010

Final Estimates of parameters

Type	Coef	Se Coef	T	P
AR (1)	-0.5294	0.4754	-1.11	0.271
AR (2)	-0.3173	0.1484	-2.14	0.038
MA (1)	-0.3280	0.4980	-0.66	0.514
Constant	0.03027	0.01109	2.73	0.009

Differencing: 1 regular difference

Number of observations: Original series 49, after Differencing 48
Residuals: SS = 0.147190 (backforecasts excluded)
MS = 0.003345 DF = 44

Modified Box-Pierce (Ljung-Box)Chi-Square Statistic				
Lag	12	24	36	48
Chi-Square	9.0	27.0	34.5	*
DF	8	20	32	*
P-Value	0.330	0.135	0.349	*

وقبل أن نختتم الحديث عن تشخيص النموذج ARIMA (2,1,0) يمكن تلخيص ما سبق بالقول بأن جميع نتائج الاختبارات والفحوص التشخيصية تؤيد ملاءمة استخدام هذا النموذج لتحليل بيانات الحج وعدم وجود أسباب واضحة تدعو إلى الشك في ملاءمة الفروض الإحصائية التي يعتمد عليها هذا النموذج للبيانات المرصودة ومن ثم يمكن استخدام هذا النموذج في التنبؤ كما سنرى.

5.5 التنبؤ

سبق أن ذكرنا في الباب الرابع أن التنبؤ هو المرحلة الأخيرة من مراحل التحليل الحديث للسلاسل الزمنية وأنه لا يمكن الانتقال إلى هذه المرحلة إلا بعد الانتهاء من إجراء جميع الفحوص والاختبارات الإحصائية الضرورية لتشخيص النموذج الذي أختير في مرحلة التعرف والتأكد من أن هذا النموذج قد أجتاز كافة هذه الفحوص والاختبارات بشكل مرضي. وفي مجال تقويم النموذج ARIMA (2, 1,0)- والذي أجتاز جميع الفحوص والاختبارات التشخيصية بنجاح- في التنبؤ حذفت المشاهدات الخمس الأخيرة من البيانات الأصلية واستخدمت أول 44 مشاهدة (من سنة 1374 هـ إلى سنة1417 هـ) لتقدير معالم النموذج والتنبؤ بالمشاهدات الخمس الأخيرة التي تم حذفها أي التنبؤ بالمشاهدات من الفترة سنة1418هـ إلى سنة 1422 هـ ثم مقارنة هذه التنبؤات بالقيم الفعلية المرصودة بحساب معياري متوسط الانحرافات المطلقة MAD ومتوسط الأخطاء النسبية المطلقة MAPE. ويعطي جدول (7) القيم الفعلية والتنبؤات والقيم المختلفة للمعيارين المحسوبة باستخدام النموذج ARIMA (2,1,0). وبفحص نتائج هذا الجدول يلاحظ وقوع كل مشاهدة من المشاهدات الخمس الأخيرة داخل فترة الثقة المناظرة، كما يلاحظ أن متوسط الأخطاء النسبية المطلقة

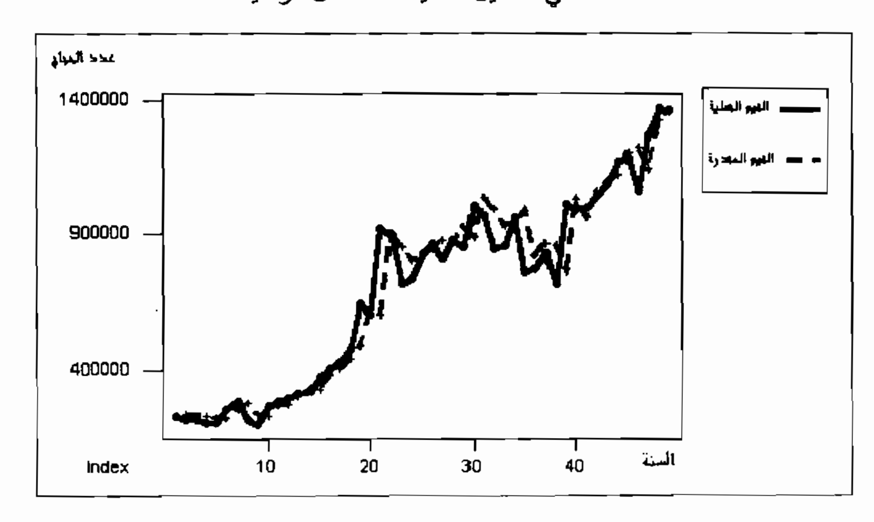
يساوي 5.2% تقريبًا وهي قيمة صغيرة. وتدل كل هذه المؤشرات على قدرة النمـوذج الذي اخترناه على التنبؤ بالمشاهدات الأخيرة بشكل جيد ومن ثـم الاطمئنـان علـى ملاءمة هذا النموذج في التنبؤ بعدد الحجاج الوافدين إلى المملكة العربية السعودية في المستقبل. وبالفعل أستخدم هذا النموذج في التنبؤ بعدد الحجاج للسنوات الثلاث القادمة، ويعرض جدول (8) هذه التنبؤات، بينما يعرض شكل (10) القيم الفعلية للسلسلة والقيم المقدرة لها.

جدول (7): التنبؤ بالمشاهدات الخمس الأخيرة لعدد الحجاج السنوي

السنة	القيم الفعلية	التنبؤات	الحد الأدنى للفترة	الحد الأعلى للفترة	الانحرافات المطلقة	الأخطاء النسبية المطلقة
1418	1178186	1204226	920192	1575933	26040	0.022101773
1419	1056730	1240827	881384	1746858	184097	0.174213848
1420	1267555	1293908	887970	1885422	26353	0.020790419
1421	1367792	1345834	885457	2045578	21958	0.01605361
1422	1359261	1396489	881464	2212434	37228	0.027388412
المتوسط					59135.2	0.052109613

جدول(8): التنبؤ بعدد الحجاج للسنوات الثلاث القادمة

السنة	التنبؤات	الحد الأدنى للفترة	الحد الأعلى للفترة
1423	1411313	1089226	1828642
1424	1482861	1068725	2057476
1425	1535926	1073500	2197549



شكل (10): القيم الفعلية والقيم المقدرة الناتجة من توفيق النموذج(2,1,0) ARIMA

تطبيقات على الباب الخامس

1. البيانات الآتية تمثل درجة الحرارة الناتجة من إحدى العمليات الكيميائية والمسجلة كل دقيقة. (تقرأ البيانات أفقيًا)

26.6	19.6	24.4	21.1	24.4
27.0	19.6	24.4	20.8	24.2
27.1	19.6	24.4	20.8	24.2
27.1	19.6	24.4	20.8	24.1
27.1	19.6	24.5	20.8	24.1
27.1	19.7	24.5	208	24.0
26.9	19.9	24.4	20.9	24.0
26.8	20.0	24.3	20.8	24.0
26.7	20.1	24.2	20.8	23.9
26.4	20.2	24.2	20.7	23.8
26.0	20.3	24.0	20.7	23.8
25.8	20.6	23.9	20.8	23.7
25.6	21.6	23.7	20.9	23.7
25.2	21.9	23.6	21.2	23.6
25.0	21.7	23.5	21.4	23.7
24.6	21.3	23.5	21.7	23.6
24.2	21.2	23.5	21.8	23.6
24.0	21.4	23.5	.21.9	23.6
23.7	21.7	23.5	22.2	23.5
23.4	22.2	23.7	22.5	23.5
23.1	23.0	23.8	22.8	23.4
22.9	23.8	23.8	23.1	23.3
22.8	24.6	23.9	23.4	23.3
22.7	25.1	23.9	23.8	23.3
22.6	25.6	23.8	24.1	23.4
22.4	25.8	23.7	24.6	23.4
22.2	26.1	23.6	24.9	23.3

22.0	26.3	23.4	24.9	23.2
21.8	26.3	23.2	25.1	23.3
21.4	26.2	23.0	25.0	23.3
20.9	26.0	22.8	25.0	23.2
20.3	25.8	22.6	25.0	23.1
19.7	25.6	22.4	25.0	22.9
19.4	25.4	22.0	24.9	22.8
19.3	25.2	21.6	24.8	22.6
19.2	24.9	21.3	24.7	22.4
19.1	24.7	21.2	24.6	22.2
19.0	24.5	21.2	24.5	21.8
18.9	24.4	21.1	24.5	21.3
18.9	24.4	21.0	24.5	20.8
19.2	24.4	20.9	24.5	20.2
19.3	24.4	21.0	24.5	19.7
19.3	24.4	21.0	24.5	19.3
19.4	24.3	21.1	24.5	19.1
19.5	24.4	21.2	24.4	19.0
				18.8

المصدر:

Box, G.E.P. and Jenkins (1976). Time series analysis, forecasting and control, san Francisco, Holden-Day.

a. وضح بكل الطرق الممكنة أن هذه السلسلة غير ساكنة.

b. وضح أن سلسلة الفروق الأولى يمكن أن تكون ساكنة.

c. أثبت عن طريق اختبارات الفروض أن النموذج المبدئي للسلسلة هو ARIMA(1,1,0).

d. شخص النموذج المبدئي بإجراء كل الفحوص والاختبارات الممكنة. هل تدل النتائج على ملاءمة النموذج المبدئي؟ إشرح بدقة.

e. اثبت أن النموذج المقدر يمكن كتابته على الصورة

$$y_t = 1.8y_{t-1} - 0.8y_{t-2} + \varepsilon_t$$

f. احذف المشاهدات الثلاث الأخيرة ثم استخدم النموذج المبدئي في التنبؤ بهذه المشاهدات . أثبت أن القيم الفعلية تقع داخل فترات الثقة المناظرة.

g. احذف المشاهدات الخمس الأخيرة ثم استخدم النموذج المبدئي في التنبؤ بهذه المشاهدات. أثبت أن القيم الفعلية تقع داخل فترات الثقة المناظرة.

h. أوجد تنبؤات النقطة والفترة لأول ثلاث مشاهدات مستقبلية.

2. البيانات الآتية تمثل قيمة الصادرات المصرية من السلع والخدمات بالمليون دولار (أسعار سنة 1995) من سنة 1960 إلى سنة 2000 (تقرأ البيانات أفقيا).

2.5048	2.4012	2.5867	2.9654	3.1359	3.249	3.3893
2.9805	2.7384	2.9805	3.2753	3.2301	3.394	3.2235
3.3516	4.1326	5.2705	5.7782	5.7924	5.587	6.5375
6.4414	5.7707	6.3905	6.7815	7.0593	7.0914	7.5417
8.3847	9.7821	10.481	10.83	12.228	13.113	12.477
13.506	13.718	14.051	13.547	14.472	15.961	

حلل هذه السلسلة تحليلاً شاملاً باستخدام منهجية بوكس وجينكنز.

3. البيانات الآتية تمثل قيمة الواردات المصرية من السلع والخدمات بالمليار دولار (أسعار سنة 1995) من سنة 1960 إلى سنة 2000 (تقرأ البيانات أفقيا).

3.6393	3.8746	4.6072	5.5514	5.7371	5.9383	6.0074
5.6504	5.7711	6.3191	7.225	7.1384	7.4892	7.8648
10.787	13.023	12.322	12.992	13.436	15.616	16.885
17.789	15.446	15.607	17.915	18.448	16.11	13.604
14.021	14.253	14.775	14.948	14.253	15.385	15.675
16.544	16.801	17.123	18.494	18.804	19.27	

حلل هذه السلسلة تحليلاً شاملاً باستخدام منهجية بوكس وجينكنز.

4. البيانات الآتية تمثل عدد الحوادث في المملكة العربية السعودية من سنة 1391هـ إلى سنة 1420هـ. (تقرأ البيانات أفقيًا)

4147	7197	9808	10897	13475	15709	15785
18051	17743	18758	17897	21597	24594	29148
29052	32092	32024	32584	35744	35799	37127
40076	85277	125325	122140	167215	135763	153727
264326	26777					

a. وضح بكل الطرق الممكنة أن السلسلة غير ساكنة في خصائصها الأساسية، هل تحتوي السلسلة على بعض القيم الشاذة ؟ اشرح

b . وضح أن سلسلة الفروق الأولى للوغاريتمات عدد الحوادث السنوي ساكنة.

c. وضح أن النموذج ARIMA (1,1,1) يمكن أن يكون مناسبًا لسلسلة لوغاريتمات عدد الحوادث السنوي

d. أجرى كل الفحوص والاختبارات التشخيصية للنموذج السابق

e. كون فترة ثقة مناسبة لأول ثلاث مشاهدات مستقبلية

5. البيانات الآتية تمثل عدد الوفيات بسبب الحوادث في المملكة العربية السعودية من سنة 1391هـ إلى سنة 1420هـ (تقرأ البيانات أفقيًا)

570	834	1058	1154	1594	1975	2033	2378	2871
2731	2427	2953	3499	3338	3277	2703	2814	2585
2647	2697	3332	3495	3719	4077	3789	3123	3131
3474	4290	4848						

حلل هذه السلسلة تحليلاً شاملاً باستخدام طريقة بوكس وجينكنز

المراجع

□ المراجع العربية □ المراجع الأجنبية

أولا: المراجع العربية:

- **شعراوي، سمير مصطفى وإسماعيل، محمد علي** (2002). *مبادئ الإحصاء* – كلية الاقتصاد – جامعة القاهرة.
- **فاندل ، والتر** (1983). *السلاسل الزمنية من الوجهة التطبيقية ونماذج بوكس- وجينكنز*.تعريب ومراجعة عزام، عبدالمرضي وهارون ، أحمد – دار المريخ للنشر (1992).
- **قنصوة، مختار حسن وعبد الفتاح، عز حسن** (1998). مقدمة *في الإحصاء الاستدلالي* –كلية العلوم– جامعة حلوان.

ثانيا : المراجع الأجنبية:

- **Abraham, B. and Ledolter, J.** (1983). *Statistical Methods for Forecasting*. John Wiley and Sons, Inc, New York.
- **Anderson, R.L.** (1942)."Distribution of The serial correlation coefficient". *Ann. Math. Stat.*, 13, 1.
- **Anderson, T.W.** (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*. John Wiley and Sons , Inc, New York.
- **Barnard, G.A., Jenkins, G.M. and Winsten, C.B.** (1962). "Likelihood inference and time series". *Jour. Royal Stat. Soc.*, A125, 32.1.
- **Bartlett, M. S.** (1946). "On the theoretical specification of sampling properties of autocorrelated time series". *Jour. Royal Stat. Soc.*, B8, 27.
- **Bowerman, B.L. and O'Connell, R.T.** (1987). *Time Series Forecasting*. Duxbury Press, Boston.

- **Box, G.E.P., and Jenkins G.M.** (1976). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. Holden – Day, San Francisco.
- **Brockwell ,B. and Davis, R.**(1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag. Pub.Comp.
- **Brockwell, B. and Davis, R.** (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer-Verlag. Pub.Comp.
- **Brown, R.G.** (1962). *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.
- **Chatfield, C.** (2003). *The Analysis of Time Series: An Introduction*. Chapman and Hall/CRC.
- **Cramer, H.** (1961). "On some classes of non-stationary stochastic processes". *Proc. 4th Berkeley Symp. On Math. Statist. And Prob.*, pp 57-78. University of California Press.
- **Gaynor, E. And Kirkpatrick, C.** (1994). *Introduction to Time Series Modeling and Forecasting in Business and Economics*. McGraw – Hill, Inc., New York, St. Louis.
- **Granger, C.W. and Newbold, P.** (1974). *Forecasting Economic Time Series*. Academic Press, New York.
- **Hamilton, J.** (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- **Harvey, A.C.** (1981). *Time Series Models*. John Wiley and Sons Inc., New York.
- **Jury, E.I.** (1964). *Theory and Applications of the Z –Transform Method*, Wiley, New York.

- **Makridakis, S., Wheelwright, S. and Hyndman, R.**(1997). *Forecasting Methods and Applications*. John Wiley and Sons, Inc, New York.
- **Mann, H.B. and Wald, A.** (1943). "On the statistical treatment of linear stochastic difference equations". *Econometrika*, 11, 173.
- **Montgomery, D.C., and Johson, L.A.** (1976). *Forecasting and Time Series Analysis*. McGraw – Hill, New York.
- **Nelson, C.R.** (1973). *Applied Time Series Analysis for Managerial Forecasting*. Holden Day, Son Francisco.
- **Pankratz, A.** (1990). *Forecasting With Univariate Box-Jenkins Models*. John Wiley and Sons, Inc, New York.
- **Priestley, M. B.** (1981). *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, New York.
- **Quenouille, M.H.** (1949). "Approximate tests of correlation in time series". *Jour. Royal Stat. Soc.*, B11, 68.
- **Scheffe, H.** (1959). *The Analysis of Variance*. Wiley, New York.
- **Tintner, G.** (1940). *The Variate Difference Method*. Principia Press, Bloomington, IN.
- **Vandaele, W.** (1990). *Applied Time Series and Box-Jenkins Models*. Academic Press.
- **Wold, H. O. A.** (1938). A *study in the analysis of stationary time series*. Almquist and Wiksell, Uppsala.

- **Yule, G. U.** (1921). "On time correlation problems with special reference to the variate difference correlation method". *J. Roy. Stat. Soc.*, 84, pp. 497-526.
- **Yule, G. U.** (1927). "On a method of investigating Periodicities in disturbed series with special reference to Wolfer's sunspot numbers". *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 226*, 267-298.

ثبت المصطلحات

عربي - انجليزي

انجليزي - عربي

(عربي/انجليزي)

Quadratic trend	اتجاه الدرجة الثانية
Exponential trend	اتجاه أسي
Secular trend	اتجاه عام
Stochastic trend	اتجاه عشوائي
Autocorrelation	ارتباط ذاتي
Partial autocorrelation	ارتباط ذاتي جزئي
Invertibility	انعكاس
Overdifferencing	أخذ فروق أكثر مما يجب
Regression approach	أسلوب الانحدار
Box-Jenkins approach	أسلوب بوكس وجينكنز
Forecast horizon	أفق التنبؤ
Shift	إزاحة
Grid search	بحث شبكي
Residuals	بواقي
Cross sectional data	بيانات متقاطعة
Seasonal swings	تأرجحات موسمية
Trial and error	تجربة وخطأ
Exploratory data analysis	تحليل استطلاعي
Regression analysis	تحليل انحدار
Time series analysis	تحليل السلاسل الزمنية
Diagnosis	تشخيص
Identification	تعرف
Autocovariance	تغاير ذاتي
Cyclical variations	تغيرات دورية
Long time variations	تغيرات المدى الطويل
Irregular variations	تغيرات غير منتظمة
Seasonal variations	تغيرات موسمية

Exponential smoothing	تمهيد أسي
Constant change forecasting	تنبؤ التغير الثابت
Interval forecast	تنبؤ الفترة
Point forecast	تنبؤ النقطة
Minimum mean square error forecast	تنبؤ ذو أصغر متوسط مربعات أخطاء
Cumulative probability distribution	توزيع احتمالي تراكمي
Predictive distribution	توزيع تنبؤي
Trivariate normal distribution	توزيع معتاد ثلاثي
Bivariate normal distribution	توزيع معتاد ثنائي
Multivariate normal distribution	توزيع معتاد متعدد
Underfitting	توفيق النموذج الأدني مباشرة
Overfitting	توفيق النموذج الأعلى مباشرة
Real root	جذر حقيقي
Autocorrelation function	دالة الارتباط الذاتي
Partial autocorrelation function	دالة الارتباط الذاتي الجزئي
Exact likelihood function	دالة الإمكان المضبوطة
Transfer function	دالة التحويل
function Autocovariance	دالة التغاير الذاتي
Green function	دالة جرين
Period	دورة
Memory	ذاكرة
Stationarity	سكون
Strict stationarity	سكون تام
Weak stationarity	سكون ضعيف
Time series	سلاسل زمنية
Homogenous nonstationary time series	سلاسل زمنية غير ساكنة متجانسة
Continuous time series	سلاسل زمنية متصلة
Discrete time series	سلاسل زمنية متقطعة
Seasonal time series	سلسلة زمنية موسمية

Deseasonalized series	سلسلة مخلصة من أثر الموسم
realization	سلسلة مرصودة
Adjusted time series	سلسلة منقحة (معدلة)
Random walk	سير عشوائي
White noise formula	صيغة الاضطرابات الهادئة
Invertibility formula	صيغة الانعكاس
Least squares method	طريقة المربعات الصغرى
True error process	عملية الأخطاء الحقيقية
White noise process	عملية الاضطرابات الهادئة
Stochastic process	عملية عشوائية
Pure random process	عملية عشوائية بحتة
Nonstationary	غير ساكن
Nonstochastic	غير عشوائي
Noninvertible	غير منعكس
Lag	فجوة
Polynomials	كثيرات الحدود
Infinite	لانهائي
Autoregressive operator	مؤثر الانحدار الذاتي
Backward shift operator	مؤثر الإزاحة للخلف
Difference operator	مؤثر الفروق
Moving average operator	مؤثر المتوسطات المتحركة
Time series operators	مؤثرات السلاسل الزمنية
Dependent variable	متغير تابع
Bivariate random variable	متغير عشوائي ثنائي
Multivariate random variable	متغير عشوائي متعدد الأبعاد
Independent variables	متغيرات مستقلة
Regressors	متغيرات منحدر عليها
Predictors	متغيرات مونبئة
Mean absolute deviation	متوسط الانحرافات المطلقة

Mean absolute percentage error	متوسط الأخطاء النسبية المطلقة
Mean squared error	متوسط مربعات الأخطاء
Moving averages	متوسطات متحركة
Simple moving averages	متوسطات متحركة بسيطة
Simulation	محاكاة
Finite	محدود
Linear filter	مرشح خطي
Complex	مركب
Time series components	مركبات السلسلة الزمنية
Yule – Walker equations	معادلات يوول - والكر
Correction factor	معامل التصحيح
Discount coefficient	معامل التناقص
Seasonal factors	معاملات موسمية
Significance	معنوية
Biased estimator	مقدر متحيز
Time series plot	منحني زمني
Invertible	منعكس
Box-Jenkins methodology	منهجية بوكس وجينكنز
Sinewaves function	موجات دالة الجيب
Season	موسم
Yule-Walker system	نظام يوول – والكر
Autoregressive models	نماذج الانحدار الذاتي
Autoregressive moving average models	نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة
Mixed autoregressive moving average models	نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة المختلطة
Linear time series models	نماذج السلاسل الزمنية الخطية
Stochastic time series models	نماذج السلاسل الزمنية العشوائية
Moving average models	نماذج المتوسطات المتحركة
Ad hoc models	نماذج حسية
Causal models	نماذج سببية

Multiplicative models	نماذج ضربية
Stochastic models	نماذج عشوائية
Deterministic models	نماذج محددة (غيرالعشوائية)
Periodical pattern	نمط دوري
Exponential growth	نمو أسي
Naïve model	نموذج سطحي
Parsimonious model	نموذج شحيح
Exponentially weighted moving average model	نموذج المتوسطات المتحركة المرجح أسيا

(انجليزي/عربي)

Ad hoc models	النماذج الحسية
Adjusted time series	السلسلة المنقحة (المعدلة)
Autocorrelation	الارتباط الذاتي
Autocorrelation function	دالة الارتباط الذاتي
Autocovariance	التغاير الذاتي
Autocovariance function	دالة التغاير الذاتي
Autoregressive models	نماذج الانحدار الذاتي
Autoregressive moving average models	نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة
Autoregressive operator	مؤثر الانحدار الذاتي
Backward shift operator	مؤثر الإزاحة للخلف
Biased estimator	مقدر متحيز
Bivariate normal distribution	توزيع معتاد ثنائي
Bivariate random variable	متغير عشوائي ثنائي
Box-Jenkins approach	أسلوب بوكس وجينكنز
Box-Jenkins methodology	منهجية بوكس وجينكنز
Causal models	نماذج سببية
Constant change forecasting	تنبؤ التغير الثابت
Complex	مركب
Continuous time series	سلاسل زمنية متصلة
Correction factor	معامل التصحيح
Cross sectional data	البيانات المتقاطعة
Cumulative probability distribution	التوزيع الاحتمالي التراكمي
Cyclical variations	التغيرات الدورية
Dependent variable	متغير تابع
Deseasonalized series	السلسلة مخلصة من أثر الموسم
Deterministic models	النماذج المحددة (غير العشوائية)
Diagnosis	التشخيص
Difference operator	مؤثر الفروق
Discount coefficient	معامل التناقص

Discrete time series	سلاسل زمنية متقطعة
Exact likelihood function	دالة الإمكان المضبوطة
Exploratory data analysis	التحليل الاستطلاعي
Exponential growth	النمو الأسي
Exponential smoothing	التمهيد الآسي
Exponential trend	الاتجاه الآسي
Exponentially weighted moving average model	نموذج المتوسطات المتحركة المرجح أسياً
Finite	محدود
Forecast horizon	أفق التنبؤ
Green function	دالة جرين
Grid search	البحث الشبكي
Homogenous nonstationary time series	السلاسل الزمنية غير الساكنة المتجانسة
Identification	التعرف
Independent variables	متغيرات مستقلة
Infinite	لانهائي
Interval forecast	تنبؤ الفترة
Invertibility	الانعكاس
Invertibility formula	صيغة الانعكاس
Invertible	منعكس
Irregular variations	التغيرات غير المنتظمة
Lag	فجوة
Least squares method	طريقة المربعات الصغرى
Linear filter	المرشح الخطي
Linear time series models	نماذج السلاسل الزمنية الخطية
Long time variations	تغيرات المدى الطويل
Mean absolute deviation	متوسط الانحرافات المطلقة
Mean absolute percentage error	متوسط الأخطاء النسبية المطلقة
Mean squared error	متوسط مربعات الأخطاء
Memory	الذاكرة
Minimum mean square error forecast	التنبؤ ذو أصغر متوسط مربعات الأخطاء
Mixed autoregressive moving average models	نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة المختلطة
Moving average models	نماذج المتوسطات المتحركة

Moving average operator	مؤثر المتوسطات المتحركة
Moving averages	المتوسطات المتحركة
Multiplicative models	النماذج الضربية
Multivariate normal distribution	توزيع معتاد متعدد
Multivariate random variable	متغير عشوائي متعدد الأبعاد
Naïve model	النموذج السطحي
Noninvertible	غير منعكس
Nonstationary	غير ساكن
Nonstochastic	غير عشوائي
Overdifferencing	أخذ فروق أكثر مما يجب
Overfitting	توفيق النموذج الأعلى مباشرة
Parsimonious model	نموذج شحيح
Partial autocorrelation	الارتباط الذاتي الجزئي
Partial autocorrelation function	دالة الارتباط الذاتي الجزئي
Period	دورة
Periodical pattern	نمط دوري
Point forecast	تنبؤ النقطة
Polynomials	كثيرات الحدود
Predictive distribution	التوزيع التنبؤي
Predictors	المتغيرات المونبئة
Pure random process	العملية العشوائية البحتة
Random walk	السير العشوائي
realization	سلسلة مرصودة
Real root	جذر حقيقي
Regression analysis	تحليل الانحدار
Regression approach	أسلوب الانحدار
Regressors	المتغيرات المفسرة (المنحدر عليها)
Residuals	البواقي
Quadratic trend	اتجاه الدرجة الثانية
Season	موسم
Seasonal factors	المعاملات الموسمية
Seasonal swings	التأرجحات الموسمية

Seasonal time series	سلسلة زمنية موسمية
Seasonal variations	التغيرات الموسمية
Secular trend	الاتجاه العام
Shift	إزاحة
Significance	معنوية
Simple moving averages	المتوسطات المتحركة البسيطة
Simulation	المحاكاة
Sinewaves function	موجات دالة الجيب
Stationarity	السكون
Stochastic models	النماذج العشوائية
Stochastic process	عملية عشوائية
Stochastic time series models	نماذج السلاسل الزمنية العشوائية
Stochastic trend	الإتجاه العشوائي
Strict stationarity	السكون التام
Time series	سلاسل زمنية
Time series analysis	تحليل السلاسل الزمنية
Time series components	مركبات السلسلة الزمنية
Time series operators	مؤثرات السلاسل الزمنية
Time series plot	المنحني الزمني
Transfer function	دالة التحويل
Trial and error	التجربة والخطأ
Trivariate normal distribution	توزيع معتاد (معتدل) ثلاثي
True error process	عملية الأخطاء الحقيقية
Underfitting	توفيق النموذج الأدني مباشرة
Weak stationarity	السكون الضعيف
White noise formula	صيغة الإضطرابات الهادئة
White noise process	عملية الإضطرابات الهادئة
Yule – Walker equations	معادلات يوول - والكر
Yule-Walker system	نظام يوول – والكر

كشاف موضوعي



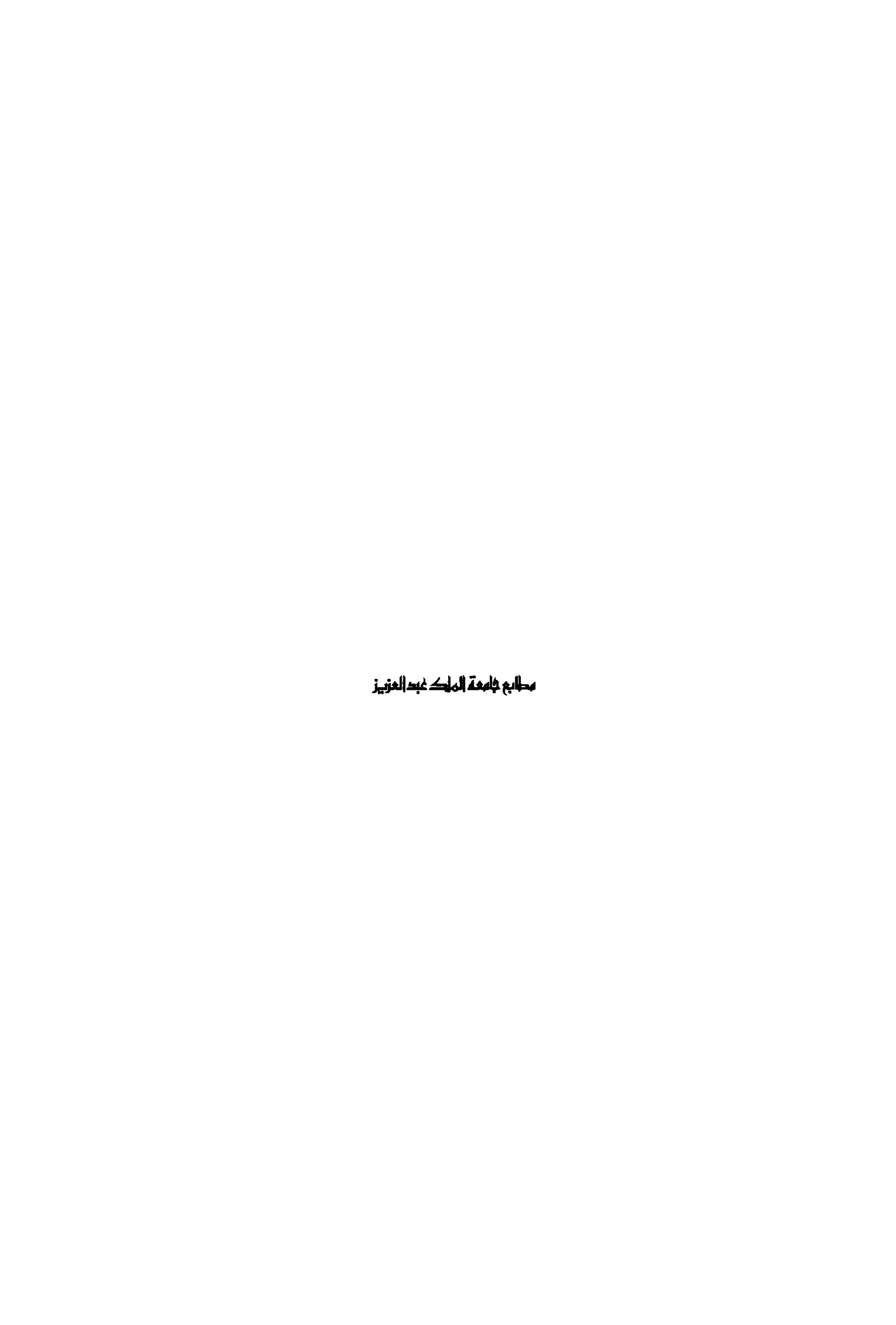
بسم الله الرحمن الرحيم

سُبْحَانَ رَبِّكَ رَبِّ الْعِزَّةِ عَمَّا يَصِفُونَ * وَسَلَامٌ عَلَى الْمُرْسَلِينَ * وَالْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ

[الصافات: 180-182]

صدق الله العظيم





مطابع جامعة الملك عبد العزيز